Corso di elementi di teoria degli insiemi

Pisa a.a. 2020-21

Docente: Marcello Mamino (marcello.mamino@dm.unipi.it)

Sito del corso: https://ciovil.li/eti20

Testo: Hrbacek-Jech, Introduction to set theory

Ricevimento studenti: mercoledì 15:00

$\forall x$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n' \cos(nx) + b_n' \sin(nx)$$

$$\Downarrow !$$

$$\forall n \quad a_n = a_n' \wedge b_n = b_n'$$

D.S. (Insieme di unicità)

$S \subseteq [0, 2\pi[$ è un ins. di unicità se

$$\forall x \in [0, 2\pi[\setminus S \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx) = 0$$

$$\Downarrow !$$

$$\forall n \quad a_n = 0 \wedge b_n = 0$$

Lemma (Cantor)

Se S soddisfa la proprietà (*) seguente, allora S è di unicità.

continua

(*) per ogni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vale la seguente implicazione

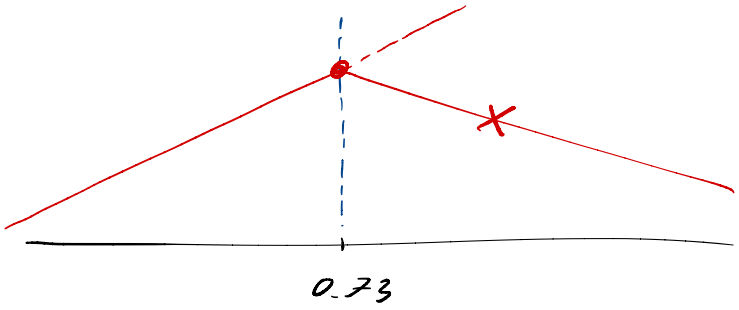
$\forall [a,b] \subseteq [0,2\pi)$, S $f|_{[a,b]}$ è lineare*

$\forall c \in [0,2\pi)$ se f ha la derivata $0x$ e la derivata Sx in c allora queste coincidono

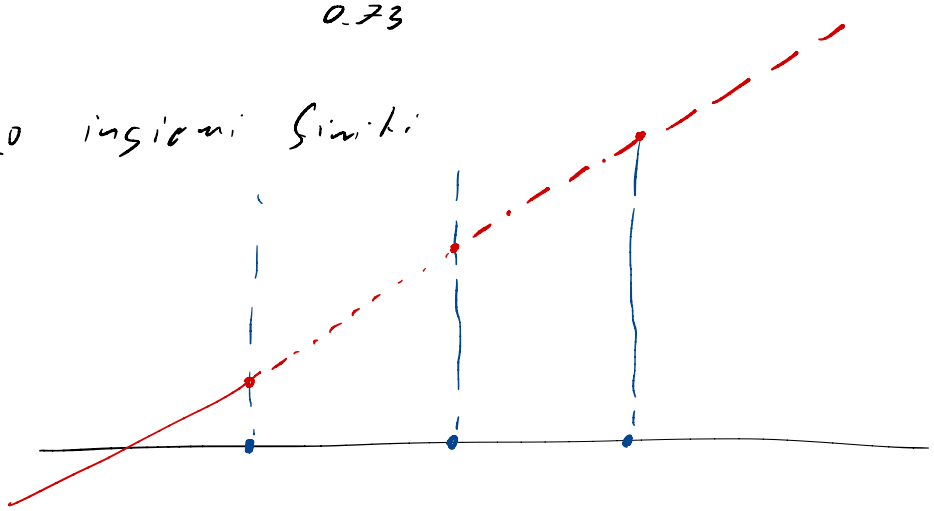
$\Rightarrow$ f è lineare*

* $ax+b$

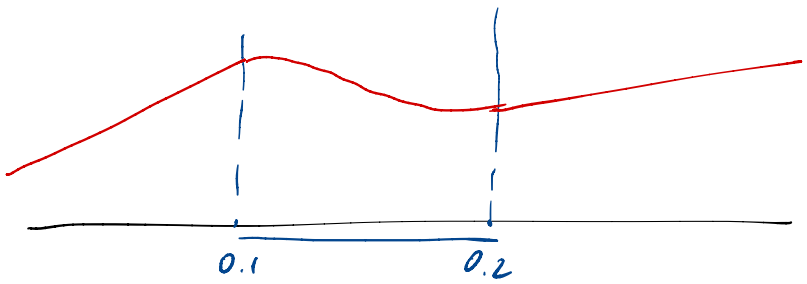
Esempio $\{0, \frac{2\pi}{3}\}$ ha la proprietà (*)



Esempio insiemi simili



NON esempio $S = [0.1, 0.2]$



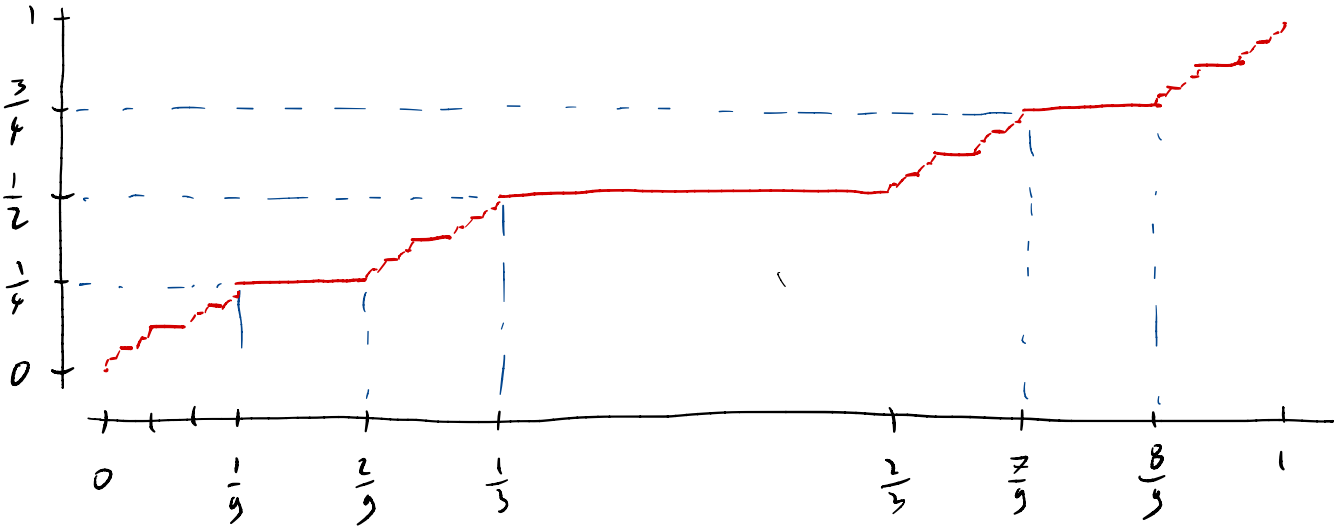
Oss. $(*) \Rightarrow S$ ha parte interna vuota.

NON esempio $\mathbb{Q}$.

Domanda: un chiuso a parte interna vuota soddisfa $(*)$?

Costruzione ("scala di Cantor" "scala del diavolo")

$f : [0,1] \to [0,1]$





$C = C_0 \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \dots$

Oss. C NON soddisfa $(*)$ infatti, integrando la scala di Cantor $F(x) = \int f(x)\,dx$ otteniamo una funzione derivabile, lineare fuori da C, che però non è lineare globalmente

Tuttavia
C è chiuso a parte interna vuota.

Teo (Cantor ~ Cantor-Lebesgue)

Sia S è chiuso e numerabile allora soddisfa $(*)$.

$$S = \{x_0, x_1, x_2 \dots\} = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

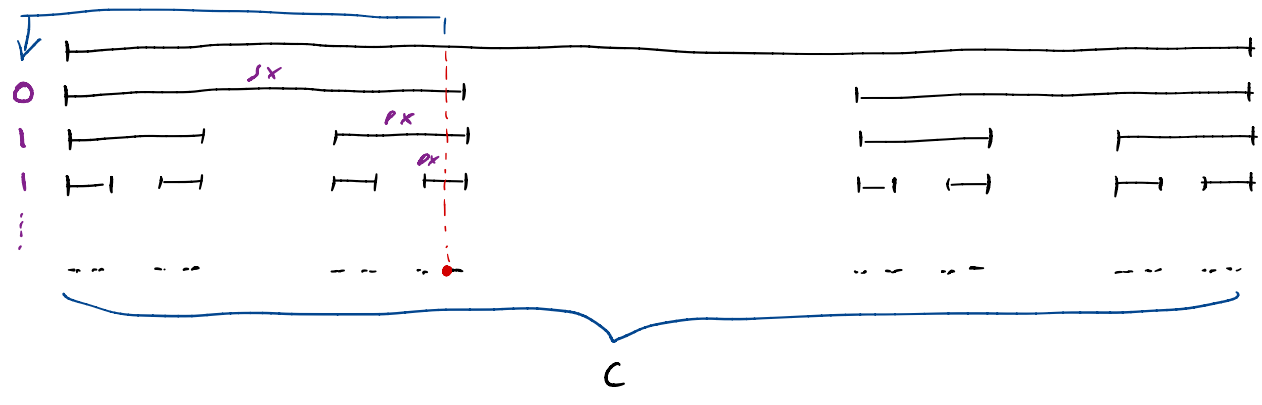
Domanda perchè C non è numerabile?

Oss. Esiste una corrisp. biunivoca

$$\alpha : C \longrightarrow \{\text{sequenze binarie}\}$$

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = a_0, a_1, a_2, \dots \quad \text{con } a_i \in \{0,1\}$$

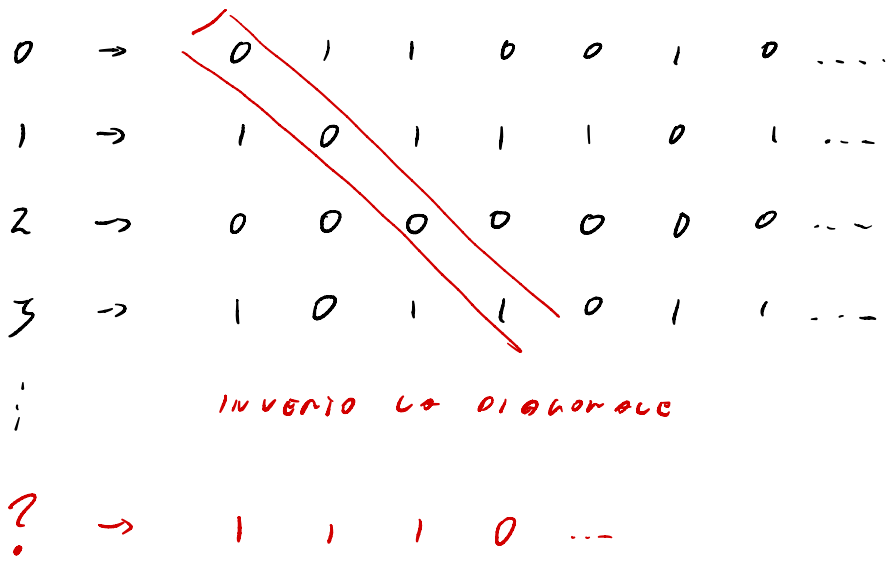
es. $0\,1\,1\,0\,1\,0\dots$ $\quad 1\,1\,1\,1\,1\dots$



Oss 2 Se potessi numerare i punti di C, potrei numerare le sequenze binarie.

Prop: Non è possibile numerare le seq. binarie

Dim per assurdo



Domanda: come dimostriamo il too?

Def $S' = S \setminus \{\text{punti isolati di } S\}$

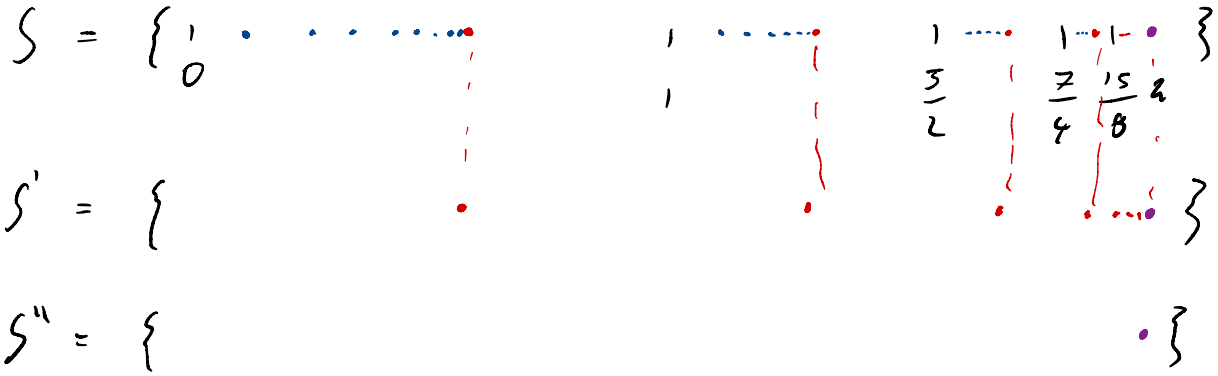
Oss. S' soddisfa (*) $\Rightarrow$ S soddisfa (*)

Dim f è lin. nei punti isolati di S, quindi applicando (*) su S', f è lineare.

Es: $S =$ 

$$= \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n > 1\right\} \cup \{1\}$$

$S' = \{1\} \Rightarrow S'$ ha (*) $\Rightarrow S$ ha (*).



Domanda Esiste n t.c. $S^{(n)} = \emptyset$ se S è chiuso e numerabile ?