Def Sia $S \subseteq \mathbb{R}$

$$S' := S \setminus \{\text{p.ti isolati di } S\}$$

$$S^{(0)} = S \qquad S^{(n+1)} = (S^{(n)})'$$

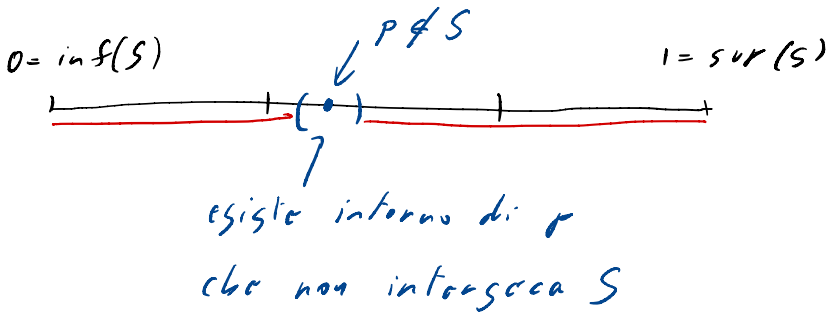
Domanda Esiste n t.c. $S^{(n)} = \emptyset$ se S è chiuso e numerabile ?

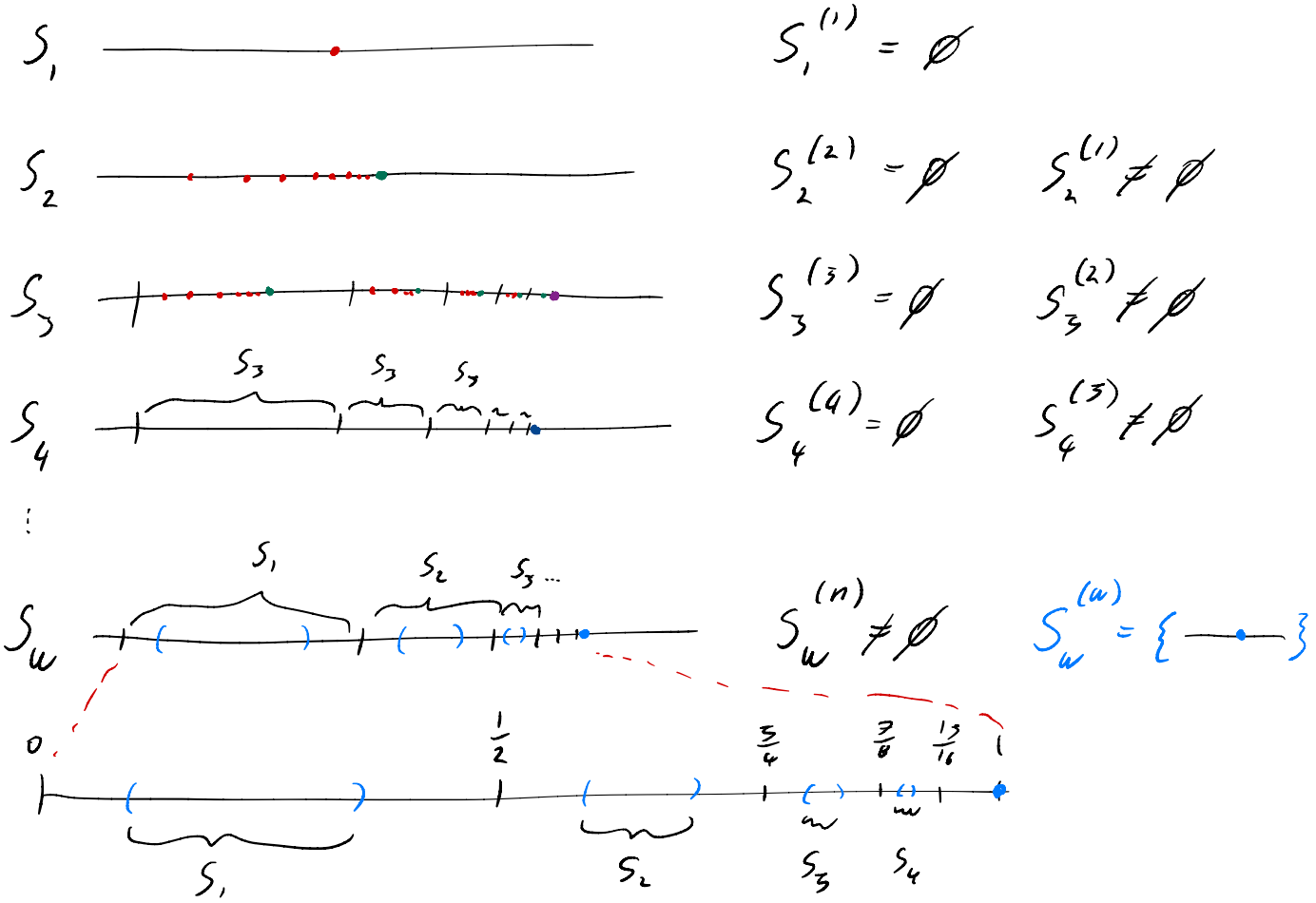
Fatto Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ un chiuso t.c. $S' = S$ allora S non è numerabile

Def $S \subseteq \mathbb{R}$ è perfetto se S è un chiuso a parte interna vuota e $S' = S$.

Esercizio Un insieme perfetto è in corrispondenza biunivoca con le successioni binarie

Dim (idea)





Lemma Sia $S^{(w)} = S^{(0)} \cap S^{(1)} \cap S^{(2)} \cap \dots$

Se $S^{(w)}$ soddisfa $(*)$ allora S soddisfa $(*)$.

Dim. Sia f una funzione che soddisfa l'ipotesi di $(*)$

Ci basta vedere che se $[a,b]$ non contiene punti di $S^{(w)}$ allora f è lineare su $[a,b]$.

$[a,b] \cap S^{(w)} = \emptyset \Rightarrow [a,b] \cap S^{(0)} \cap S^{(1)} \cap S^{(2)} \dots = \emptyset$

$\Downarrow$

$\exists n \; [a,b] \cap S^{(0)} \cap \dots \cap S^{(n)} = \emptyset$

$S^{(n)}$ ha $(*) \Rightarrow S$ ha $(*)$

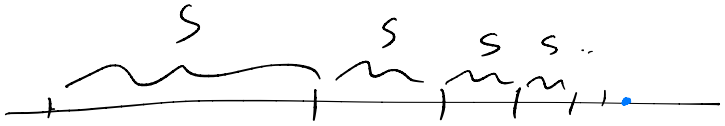
$\Downarrow$

$\exists n \; [a,b] \cap S^{(n)} = \emptyset$

Ora $[a,b] \cap S^{(n)} = ([a,b] \cap S)^{(n)}$ — facile verifica — e la condizione $(*)$ per $[\,]^{(n)}$ implica la

condizione star per $\square$. Di conseguenza l'insieme $[a,b] \cap S$ soddisfa (*). Quindi f è lineare su $[a,b]$. $\square$

Oss) S_w soddisfa (*) infatti $\underbrace{\left(S^{(\omega)}\right)'}_{S^{(\omega+1)}} = \emptyset$



$S^{(\omega+2)} = \left(S^{(\omega+1)}\right)'$

$S^{(\omega+n)}$

$\vdots$

$S^{(2\omega)}$ $\quad S^{(\omega\cdot\omega)}$ $\quad S^{(\omega^\omega)}$ $\quad S^{(\omega^{\omega^\omega})}$ $\quad S^{(\omega^{\omega^{\omega^\omega}})}$

$S^{(\varepsilon_0)}$

$S^{(\eta)} = \emptyset \Rightarrow S$ soddisfa (*)

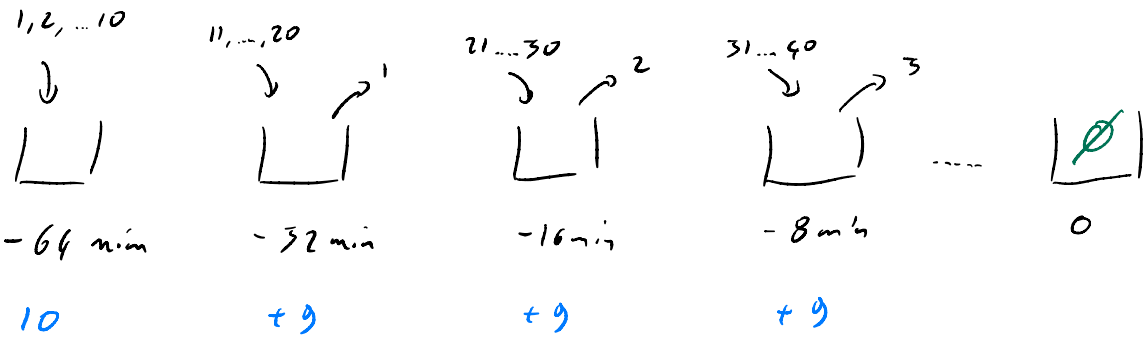
Oss. A numerabile e $B \subseteq A \Rightarrow B$ numerabile

$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$

$b_0 \quad b_1 \quad b_2 \dots$

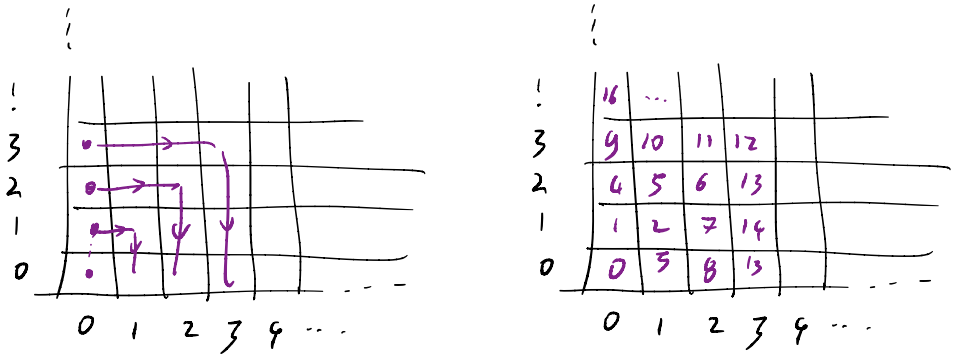
Alcuni esempi di comportamento delle cardinalità (bigezioni)

Esempio



Esempio Esiste una bigezione fra $\mathbb{N}^2$ e $\mathbb{N}$

$$|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$$



altro modo $\quad (a, b) \longmapsto 2^a(2b+1) - 1$

Esempio $\quad |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$

① $\quad |\mathbb{R}| = |\,]0,1[\,|$

$$x \longmapsto \left(\frac{\pi}{2} + \arctan(x)\right)\cdot\frac{1}{\pi}$$

② idea per $\quad |\mathbb{R}^2| = |\,]0,1[^2| \overset{!}{=} |\,]0,1[\,| = |\mathbb{R}|$

$$(0.a_1 a_2 a_3 a_4 \dots,\ 0.b_1 b_2 b_3 b_4 \dots) \longmapsto 0.a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 a_4 b_4 \dots$$

cifre decimali

guaio: il 9 periodico

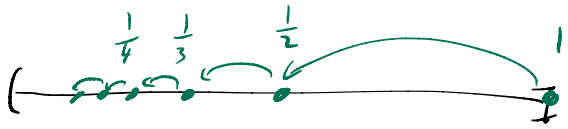
(3) $|(0,1)| = |]0,1]|$

$f :]0,1] \to]0,1[$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{se } x = \frac{1}{n} \text{ per qualche } n \in \mathbb{N} \\ x & \end{cases}$$

$|\{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \ldots\}| =$

$= |\{2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \ldots\}|$



(4) Ci basta vedere $|]0,1]^2| = |]0,1]|$

scrivo lo sviluppo decimale infinito dei numeri in $(0,1]$

$$0.742 = 0.7419999\ldots$$

$$(0.047001 09\ldots, 0.2007014\ldots) \mapsto 0.042700700101094\ldots$$

un gruppo è $0\ldots0[\text{non } 0]$

(5) $\mathbb{R}^2 \to]0,1[^2 \to]0,1]^2 \to]0,1] \to]0,1[\to \mathbb{R}$

e sono tutte bigezioni ∎

Domanda $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2|$ $\quad |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2|$

In generale se S è infinito $|S| = |S^2|$?

Paradosso (di Russell)

$$N = \{X \mid X \notin X\}$$

$N \in N \to N \notin N$ ⇝

$\overset{?}{N \notin N} \to N \in N$ ⇝

$\Rightarrow$ $\{X \mid \text{proprietà di } X\}$ in generale NON SI PUÒ DIRE