Gioco di parole

- Il vocabolario annovera una quantità finita di parole
- $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste una quantità finita di possibili frasi di al più n parole
- per il principio del minimo esiste

n = "il minimo numero naturale che non si può definire
1 2 3 4 5 6 7 8 9
con meno di venti parole"
10 11 12 13 14 < 20 (!)

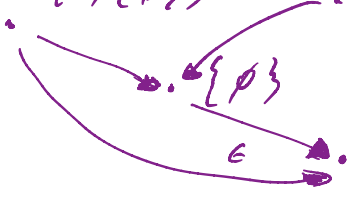
Linguaggio della teoria degli insiemi

variabili: $x, y, z, X, Y, \alpha, \beta$ ← le variabili rappresentano sempre insiemi

Alcuni insiemi: $\emptyset = \{\}$ $\{\emptyset\}$ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ...

relazioni: $=$, $\in$

formule atomiche: var = var. var. $\in$ var.



Intuizione: l'universo insiemistico è un gigantesco grafo diretto (aciclico).

- formule:
  1. formule atomiche
  2. form. $\wedge$ form.
     form. $\vee$ form.
     form $\to$ form.
     $\neg$ form.
  3. $\forall$ var. form.
     $\exists$ var. form.

$(A \wedge B) \vee C$

$A \wedge (B \vee C)$

$\{1\} \notin \{1\}$

$1 \in \{1\}$

$A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$

Significato dei connettivi logici

$A \wedge B$	è vera	se A è vera	e B è vera
$A \vee B$	falsa	falsa	falsa
$A \to B$	falsa	vera	falsa
$\neg A$	vera	falsa	

$A \to B \equiv \neg A \vee B$

abbreviazione: non abbiamo simboli per le formule

$\exists x\, \varphi(x)$ $\equiv$ "c'è un insieme x con la proprietà φ"

$\forall x\, \varphi(x)$ $\equiv$ "tutti gli x godono della proprietà φ"

Esempi / esercizi

- Sia S un insieme qualunque e P una proprietà qualunque

$$\exists x \in S \left(P(x) \to (\forall y \in S \; P(y))\right)$$

$S = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \mid x\} \cup \{5\}$ $\quad P(x) =$ "$2 \mid x$"

consideriamo $x = 5$.

$$\underbrace{P(5)}_{F} \to \underbrace{(\forall y \in S \; P(y))}_{F} \qquad F \to F$$

- $\varphi \leftrightarrow \psi \overset{\text{def.}}{\equiv} (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$

verifichiamo che $\varphi \leftrightarrow \psi$ è vera se e solo se φ e ψ hanno il medesimo valore di verità.

- $\varphi \to \psi \equiv \neg\psi \to \neg\varphi$ $\qquad$ | $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$

$\varphi \wedge (\psi \vee \tau) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \tau)$

$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi) \vee (\neg\psi)$

- $\neg\exists x \, P(x) \equiv \forall x \, \neg P(x)$ $\qquad \neg\exists \equiv \forall\neg$

$\neg\forall x \, P(x) \equiv \exists x \, \neg P(x)$ $\qquad \neg\forall \equiv \exists\neg$

$\forall\neg\exists \equiv \forall$

$\exists\neg\forall \equiv \exists$

è sgrammaticata!

- $\exists x \in A \; \varphi(x) \overset{\text{def.}}{\equiv} \exists x \, (x \in A \wedge \varphi(x))$

$\forall x \in A \; \varphi(x) \overset{\text{def.}}{\equiv} \forall x \, (x \in A \to \varphi(x))$

$\exists! x\, \varphi(x) \overset{\text{def.}}{\equiv} \exists x\, \varphi(x) \wedge \forall x_1 \forall x_2 \left(\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2)\right) \to x_1 = x_2$

$\exists! x \in A\, \varphi(x) \overset{\text{def.}}{\equiv} \exists x \in A\, \varphi(x) \wedge \forall x_1 \in A\ \forall x_2 \in A$
$\left(\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2)\right) \to x_1 = x_2$

$\forall x \in A\ \varphi(x) \not\equiv \forall x\, (x \in A \wedge \varphi(x))$
$\Downarrow$
$\forall x\, (x \in A) \rightsquigarrow$

$A \to B \equiv \neg A \vee B \Rightarrow \forall x\, (\neg x \in A \vee \varphi(x))$ ok.

- $A \subseteq B \overset{\text{def.}}{\equiv} \forall x \in A\ x \in B$

$C = A \cup B \overset{\text{def.}}{\equiv} \forall x\ x \in C \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$

Nota: non abbiamo mai detto che $A \cup B$ o $A \cap B$ esistono!

Le classi

classe = proprietà = formula $\varphi(x)$

elemento della classe = insieme che gode della prop.
= un x che soddisfa $\varphi(x)$

Es:
"ogni elemento della classe dei gruppi abeliani ..."
"se x soddisfa la proprietà di essere un g. ab. ..."

Def. La classe di tutti gli insiemi V

$x \in V \overset{\text{def.}}{\equiv} x = x$

Assiomi di ZFC (Zermelo-Fraenkel con l'assioma di scelta (C = Choice))

$A \notin B \overset{\text{def.}}{\equiv} \neg(A \in B)$

① Assioma dell'insieme vuoto

"esiste UN insieme vuoto"

$\exists x \; \forall y \; y \notin x$

② Assioma di estensionalità

"un insieme è determinato dalla collezione dei suoi elementi"

$a = b \leftrightarrow \forall x \, (x \in a \leftrightarrow x \in b)$

a, b: variabili libere

$\forall a \, \forall b$ implicito.

Prop. "esiste un solo insieme vuoto"

$(\forall y \, (y \notin x_1) \wedge \forall y \, (y \notin x_2)) \rightarrow x_1 = x_2$

o più brevemente $\exists! x \; \forall y \; y \notin x$

Quindi denotiamo con $\emptyset$ l'insieme vuoto

$x = \emptyset \overset{\text{def.}}{\equiv} \forall y \, (y \notin x)$