A	B	$A \to B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$	$A \leftrightarrow B$
V	V	V	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Def una funzione logica $f(A_1, \dots A_n)$ (V o F) è una mappa $\{V,F\}^n \to \{V,F\}$.

Es Dimostrare che ogni possibile funzione logica può essere scritta usando solo $\wedge$ e $\neg$.

Es $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$

$A \to B \equiv B \vee \neg A \equiv \neg(\neg B \wedge A)$

Prop: "esiste un solo insieme vuoto"

$$(\forall y\ (y \notin x_1) \wedge \forall y\ (y \notin x_2)) \to x_1 = x_2$$

o più brevemente $\exists! x\ \forall y\ y \notin x$

Dim Supponiamo di avere x_1, x_2 tali che $\forall y\ y \notin x_1$ e $\forall y\ y \notin x_2$

notiamo che $\forall y\ y \in x_1 \leftrightarrow y \in x_2$ (F F V)

quindi per estensionalità $x_1 = x_2$ ☐

① Assioma dell'insieme vuoto

"esiste UN insieme vuoto"

$\exists x \; \forall y \; y \notin x$

② Assioma di estensionalità

"un insieme è determinato dalla collezione dei suoi elementi"

$a = b \leftrightarrow \forall x \, (x \in a \leftrightarrow x \in b)$

③ "Assioma" di separazione

Se A è un insieme e $\varphi(x)$ una formula

allora esiste $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$

$\forall A \; \exists B \; \forall x \; x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x))$

Più precisamente "Schema di assiomi": uno per ogni possibile formula φ.

Prop: $\forall A \; \exists! B \; \forall x \; x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x))$

Dim Fisso A, considero B_1, B_2 che soddisfano la richiesta. Allora:

$x \in B_1 \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x)) \leftrightarrow x \in B_2$

quindi per estensionalità $B_1 = B_2$ ☐

Siamo giustificati a scrivere

$$B = \{ x \in A \mid \varphi(x) \}$$

come abbreviazione per la formula

$$\forall x \quad x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x))$$

Domanda

$$\forall A \; \exists B \; \forall x \quad x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x))$$

φ — F — F

$$\exists B \; \forall x \quad \neg x \in B \quad \leftarrow \text{assioma del vuoto}$$

Potremmo capitare che φ ha altre variabili (libere) $\varphi(x, a_1 \dots a_n)$

$$\forall A \; \exists B \; \forall x \quad x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x, a_1 \dots a_n))$$

$\forall a_1 \dots a_n$ implicito.

$\forall x \exists y$

$\exists y \forall x$

$A = \mathbb{R} \qquad \varphi \equiv x^2 < a_1$

e quindi $a_1 = 1 \qquad B =]-1, 1[$

$\quad\;\; a_1 = 4 \qquad B =]-2, 2[$

$\quad\;\; a_1 = -1 \qquad B = \emptyset$

Prop Non esiste l'insieme di tutti gli insiemi

Dim Per assurdo supponiamo che un insieme V t.c.

$\forall x \quad x \in V$ per supposizione

$\exists! B \quad \forall x \quad x \in B \leftrightarrow (\underbrace{x \in V}_{\text{vero}} \wedge x \notin x)$

$\exists! B \quad \forall x \quad x \in B \leftrightarrow x \notin x$

$a \notin B \equiv$ def. $\neg(a \in B)$

Assegno $x = B$: $B \in B \leftrightarrow B \notin B$

V	F	F
F	F	V

Ma

④ Assioma del paio

dati a e b esiste $\{a, b\}$

$\forall a \forall b \exists B \forall x \quad x \in B \leftrightarrow (x = a \vee x = b)$

Prop prec. estensionalità

$\forall a \forall b \exists! B \forall x \quad x \in B \leftrightarrow (x = a \vee x = b)$

Cor.

$\forall a \exists! B \forall x \quad x \in B \leftrightarrow x = a$

dato a esiste $\{a\}$

Dim. basta prendere $b = a$ nell'assioma.

Oss per ostensionalità $\{a,b\} = \{b,a\}$

Def (coppia di Kuratowski) $(1,2) \neq (2,1)$

$$(a,b) \overset{\text{def.}}{\equiv} \{\{a\}, \{a,b\}\}$$

↑ coppia ordinata.

Prop. $(a,b) = (a',b') \iff (a = a' \wedge b = b')$

Dim Fissiamo $C = (a,b) = (a',b')$ $\quad A \vee B \to C \equiv (A \to C) \wedge (B \to C)$

$$x = a \iff \forall y \in C \; x \in y$$

$$\forall y \; \underline{y \in C} \to x \in y$$

$y = \{a\} \vee y = \{a,b\}$

$$\forall y \; (\underline{y = \{a\} \to x \in y}) \wedge (\underline{y = \{a,b\} \to x \in y})$$

$x = a$ $\qquad$ $x = a \vee x = b$

$x = a$

$$x = a' \iff \forall y \in C \; x \in y$$

Di conseguenza $x = a \iff x = a'$, ossia $a = a'$.

Poniamo a b e b'. Supponiamo $b \neq a$ e $b' \neq a$.

$$x = b \iff x \neq a \wedge \underline{\exists y \in C \; x \in y}$$

esercizio

escluso

$x \in \{a\} \vee x \in \{a,b\}$

$x = a \vee x = a \vee x = b$

$$x = b' \leftrightarrow x \neq a \wedge \exists y \in C \; x \in y$$

Quindi $x = b \hookrightarrow x = b'$, ossia $b = b'$.

Mancano i casi:

- $b = a \quad b' \neq a$
- $b \neq a \quad b' = a$

} simmetrici

- $b = a \quad b' = a \longrightarrow b = b'$ ovvio ☺

Consideriamo $b = a$ $b' \neq a$, voglio mostrare che è assurdo. L'ipotesi è

$$(a, b) = (a^*, b')$$

$$(a, a) = (a, b')$$

$$\{\{a\}\} = \{\{a\}, \{a, b'\}\}$$

$\{a\}, \{a, a\} = \{a\}$

$= \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$

$\{a, b'\}$

$\{a, b'\} \in \{\{a\}\}$

$\{a, b'\} = \{a\}$ } palese

$b' \in \{a\}$

$b' = a$ } palese

↯

Notazione

$$(a, b, c) = ((a, b), c)$$

$$(a_1, a_2 \dots a_n) = [(a_1 \dots a_{n-1}), a_n)$$

Oss. (esercizio)

$$(a, b, c) = (a', b', c') \leftrightarrow (a = a' \wedge b = b' \wedge c = c')$$

$$(a_1 \dots a_n) = (a_1' \dots a_n') \leftrightarrow (a_1 = a_1' \wedge \dots \wedge a_n = a_n')$$

(5) Assioma dell'unione

dato un insieme A esiste l'insieme $B = \bigcup A$ i cui elementi sono tutti gli elementi degli elementi di A.

$$\forall A \; \exists B \; \forall x \quad x \in B \leftrightarrow \exists y \in A \; x \in y$$

Prop. per estensionalità

$$\forall A \; \exists! B \; \forall x \quad x \in B \leftrightarrow \exists y \in A \; x \in y$$

Notazione

$$B = \bigcup A \overset{\text{def.}}{\equiv} \forall x \; x \in B \leftrightarrow \exists y \in A \; x \in y$$

Operazioni elementari sugli insiemi

$a \cup b \overset{\text{dot.}}{=} \bigcup \{a, b\}$ usando l'assioma del paio e l'assioma dell'unione.

Verifica $\forall x \; x \in a \cup b \leftrightarrow (x \in a \vee x \in b)$

Domanda Perché per le intersezioni non serve un nuovo assioma?