⑤ Assioma dell'unione

dato un insieme A esiste l'insieme $B = \bigcup A$ i cui elementi sono tutti gli elementi degli elementi di A.

$$\forall A\ \exists B\ \forall x\quad x \in B \leftrightarrow \exists y \in A\ x \in y$$

Prop. per estensionalità

$$\forall A\ \exists! B\ \forall x\quad x \in B \leftrightarrow \exists y \in A\ x \in y$$

Es. $A = \{\{1,2,3\}, \emptyset, \{2,3,4\}\}$

$\bigcup A = \{1,2,3,4\}$

Operazioni elementari sugli insiemi

$a \cup b \overset{\text{def.}}{=} \bigcup \{a,b\}$ usando l'assioma del paio e l'assioma dell'unione.

Verifica $\forall x\quad x \in a \cup b \leftrightarrow (x \in a \vee x \in b)$

$x \in \bigcup \{a,b\}$

$\exists y \in \{a,b\}\ x \in y$) ax. unione

$\exists y\ (y = a \vee y = b) \wedge x \in y$) ax. paio

$x \in a \vee x \in b$

Domanda Perché per le intersezioni non serve un nuovo assioma?

Definizione dato un insieme $A \neq \emptyset$

$\bigcap A$ = insieme degli elementi di tutti gli elementi di A

$$x \in \bigcap A \iff \forall y \in A \quad x \in y.$$

Perché $A \neq \emptyset$? Perché altrimenti $\bigcap \emptyset = V$. *

Prop La def. è ben data.

Dim Siccome $A \neq \emptyset$, esiste $B \in A$. Considero

$$C = \{x \in B \mid \forall y \in A \quad x \in y\}$$

sostengo che $C = \bigcap A$ (verifica immediata).

* Nota: $\forall y \in \emptyset \ldots$ è sempre vera.

$\Vdash$ def.

$\forall y \ (y \in \emptyset) \to \ldots$

$F \to ?$

V

Def $a \cap b \overset{def.}{=} \bigcap \{a, b\}$

Verifica $x \in a \cap b \iff (x \in a \wedge x \in b)$.

Def $a \setminus b \overset{def}{=} \{x \in a \mid x \notin b\}$ per separazione

$a \triangle b \overset{def.}{=} (a \setminus b) \cup (b \setminus a)$

Proprietà

$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c) = a \cup b \cup c$ } associativa

$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b \cap c$ }

$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$ } distributività

$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$ }

$a \setminus (b \cup c) = (a \setminus b) \cap (a \setminus c)$ } I. di de Morgan

$a \setminus (b \cap c) = (a \setminus b) \cup (a \setminus c)$ }

$a \triangle (b \triangle c) = (a \triangle b) \triangle c = a \triangle b \triangle c$

$a_1 \triangle \dots \triangle a_n = \{x \mid x$ appartiene ad un numero dispari degli $a_1, \dots, a_n\}$

Def $\{a, b, c\} \overset{def.}{=} \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$

$\{a_1, \dots a_n\} \overset{def.}{=} \{a_1\} \cup \dots \cup \{a_n\}$

Verifica

$x \in \{a, b, c\} \iff (x = a \vee x = b \vee x = c)$

etc.

Vorremmo definire

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

per poter usare separazione ci serve un X tale per cui

$$A \times B = \{x \in X \mid \exists a \in A \; \exists b \in B \; x = (a,b)\}$$

(6) Assioma della parti:

dato A esiste l'insieme $\mathcal{P}(A)$ di tutti i sottoinsiemi di A

$$\forall A \; \exists B \; \forall x \quad x \in B \leftrightarrow \underbrace{x \subseteq A}_{\forall y \in x \; y \in A}$$

Oss (per estensionalità)

$$\forall A \; \exists! B \; \forall x \quad x \in B \leftrightarrow x \subseteq A$$

Pf

$$B = \mathcal{P}(A) \overset{\text{def.}}{\equiv} \forall x \quad x \in B \leftrightarrow x \subseteq A$$

Oss $\quad a \in A \wedge b \in B \to (a,b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

$\| \quad \{\{a\},\{a,b\}\}$

Verifica $\quad a \in A \cup B \quad b \in A \cup B$

$\{a\} \subseteq A \cup B \quad \{a,b\} \subseteq A \cup B$

$\downarrow \in \mathcal{P}(A \cup B) \quad \downarrow \in \mathcal{P}(A \cup B)$) ax. coppie

$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

$\downarrow \quad \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$) ax. coppie

Def

$$A \times B = \{x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid \exists a \in A \; \exists b \in B \; x = (a,b)\}$$

Verifica

$$x \in A \times B \iff \exists a \in A \; \exists b \in B \; x = (a,b)$$

Def "Relazione binaria fra A e B" = "sottoinsieme di $A \times B$".

Data $R \subseteq A \times B$ possiamo scrivere

$$x \underset{\leq}{R} y \overset{\text{def.}}{\equiv} (x,y) \in \underset{\leq}{R}$$

Def $R \subseteq A \times A$ è una r. di equivalenza se

$\forall x \in A \quad x R x$

$\forall x \in A \ \forall y \in A \quad x R y \to y R x$

$\forall x \in A \ \forall y \in A \ \forall z \in A \quad (x R y \wedge y R z) \to x R z$

abbreviamo questo con $\forall x, y, z \in A$.

Def. $\leq \subseteq A \times A$ è una r. di ordine se

$\forall x \in A \quad x \leq x$

$\forall x, y \in A \quad (x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y$ (antisimm.)

$\forall x, y, z \in A \quad (x \leq y \wedge y \leq z) \to x \leq z$

Def. $< \subseteq A \times A$ è una r. di ord. stretto se

$\forall x \in A \quad \neg x < x$

$\forall x, y \in A \quad x < y \to \neg y < x$ (asimm.)

$\forall x, y, z \in A \quad (x < y \wedge y < z) \to x < z$

Nota Non sono chiedere la p. asimmetrica.

Dim supponiamo $x < y \ | \ o \ | \ y < x$

per transitività $x < x$ ↯

Oss. Sia $\leq$ di ord largo su A allora

$$< \overset{def.}{=} \leq \setminus \{x \in A \times A \mid \exists a \; x = (a,a)\}$$

$a < b \overset{def.}{\iff} a \leq b \wedge a \neq b$

è di ord. stretto

Oss. Sia $<$ di ord stretto allora

$$\leq \overset{def.}{=} < \cup \{x \in A \times A \mid \exists a \; x = (a,a)\}$$

$a \leq b \overset{def.}{\iff} a < b \vee a = b$

è di ordine largo

Oss. inoltre la corrispondenza è 1-1.

Def data una relazione binaria $R \subseteq A \times B$

$$Dom(R) \overset{def.}{=} \{x \in A \mid \exists y \; (x,y) \in R\}$$

$$Im(R) \overset{def.}{=} \{y \in B \mid \exists x \; (x,y) \in R\}$$

Def $f \subseteq A \times B$ è una funzione $f : A \to B$

$\forall x \in A \; \exists! y \in B \; (x,y) \in f$.

$f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$

Notazione $y = f(x) \overset{def.}{\iff} (x,y) \in f$.

Def $f: A \to B$ è

- iniettiva se $\forall y \in Im(f)\ \exists! x\ \ y = f(x)$
- suriettiva (su B) se $\forall y \in B\ \exists x\ \ y = f(x)$
- biunivoca se è iniettiva e suriettiva

Def. Se $f: A \to B$ è biunivoca

$$f^{-1} = \{ (y, x) \in B \times A \mid y = f(x) \}$$

Def Date $g: A \to B$ e $f: B \to C$

$$f \circ g = \{ (x, y) \in A \times C \mid y = f(g(x)) \}$$

I numeri naturali

Vorremmo codificare n con un insieme di n elementi.

$0 = \emptyset$

$1 = \{\emptyset\}$

$2 = \{0, 1\}$

$3 = \{0, 1, 2\}$

$\vdots$

$n = \{0, 1, \dots, n-1\}$

Def $x+1 \overset{def.}{\equiv} x \cup \{x\}$

occhio, non stiamo definendo $+1$!

potremmo scrivere $succ(x) \overset{def.}{\equiv} \dots$

Def S è un insieme *induttivo* se:

- $\emptyset \in S$
- $\forall x \in S \quad x \cup \{x\} \in S$ (scritto anche $x+1 \in S$)

(7) Assioma dell'infinito

esiste un insieme induttivo

$$\exists X \; \emptyset \in X \wedge \forall y \in X \; y \cup \{y\} \in X.$$

"il più piccolo insieme induttivo"

Def $\mathbb{N} = \omega = \bigcap$ tutti gli insiemi induttivi

$$x \in \omega \iff \forall S \; \underbrace{S \text{ è induttivo}}_{\emptyset \in S \;\; \forall y \in S \;\; y+1 \in S} \to x \in S$$

Oss. La definizione è ben data.

Dim. Sia X induttivo (esiste per (7)),

$$\omega := \{ x \in X \mid \forall S \; S \text{ è ind.} \to x \in S \}$$

chiaramente l'insieme ω così costruito soddisfa la definizione. Inoltre, la definizione è della forma

$$\forall x \quad x \in \omega \iff \dots$$

quindi, per estensionalità, ω è unico.