per noi sono teoremi

Assiomi di Peano

① $0 \in \mathbb{N}$

② $\forall n \in \mathbb{N} \quad n+1 \in \mathbb{N}$

③ $\forall m,n \in \mathbb{N} \quad m=n \leftrightarrow m+1 = n+1$

④ $\forall n \quad 0 \neq n+1$

⑤ "Schema di induzione"

Data una proprietà (formula) $\varphi(x)$

$$\big(\varphi(0) \wedge \forall n\ \varphi(n) \to \varphi(n+1)\big) \longrightarrow \forall n\ \varphi(n)$$

Prop $\mathbb{N} = \omega$ soddisfa gli assiomi di Peano

Dim ① e ② immediati;

⑤ Fissiamo φ e consideriamo

$$X = \{ n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) \}$$

Osserviamo che X è induttivo

- $0 \in X \iff \varphi(0)$
- $n \in X \to n+1 \in X \iff \varphi(n) \to \varphi(n+1)$

Di conseguenza $\mathbb{N} \subseteq X$ (chiaramente $\mathbb{N} = X$)

Ossia $\forall n \in \mathbb{N}\ n \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}\ \varphi(n)$

(4) $\forall n \quad n+1 \neq 0 \qquad (\nexists n \quad n+1 = 0)$

P

$n \cup \{n\} \ni n \Rightarrow n \cup \{n\} \neq \emptyset$

(3) $\forall m, n \in \mathbb{N} \quad m = n \hookrightarrow m+1 = n+1$

$\longrightarrow$ immediata.

Dobbiamo dim. $m+1 = n+1 \rightarrow m = n$

Oss $\forall m \quad \bigcup m+1 = m$

Dim per induzione $\{\emptyset\}$

- $m = 0 \qquad \bigcup m+1 = \bigcup(\emptyset \cup \{\emptyset\}) = \emptyset = 0$
- $\bigcup m+1 = m \longrightarrow \bigcup (m+1)+1 = m+1$

$$\bigcup (m+1)+1 = \bigcup(m \cup \{m\} \cup \{m \cup \{m\}\})$$

$$= \underbrace{\left(\bigcup m \cup \{m\}\right)}_{\text{ipotesi induttiva}} \cup \underbrace{\bigcup\left(\{m \cup \{m\}\}\right)}_{*}$$

$$= m \cup m \cup \{m\}$$

$$= m \cup \{m\} = m+1$$

(*) $x \in \bigcup(\{\clubsuit\}) \Leftrightarrow \exists y \in \{\clubsuit\} \; x \in y \Leftrightarrow x \in \clubsuit$

Quindi per estensionalità $\bigcup(\{\clubsuit\}) = \clubsuit$

(▲) $x \in \bigcup(A \cup B) \Leftrightarrow \exists y (y \in A \vee y \in B) \wedge x \in y \Leftrightarrow \exists y \in A \; x \in y \vee \exists y \in B \; x \in y \Leftrightarrow x \in \bigcup A \vee x \in \bigcup B \Leftrightarrow x \in (\bigcup A) \cup (\bigcup B)$

Quindi per estensionalità $\bigcup(A \cup B) = (\bigcup A) \cup (\bigcup B)$

$$\cup_{m+1} = m$$

$$m+1 = n+1 \rightarrow \cup_{m+1} = \cup_{n+1}$$

$$\| \qquad \|$$

$$m \quad = \quad n$$ ∎

Oss $\forall n \in \mathbb{N} \quad n=0 \iff \nexists m \in \mathbb{N} \quad n = m+1$

Dim Equivalentemente:

$$n \neq 0 \rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \quad n = m+1$$

Induzione

- $n=0 \qquad n \neq 0 \rightarrow \dots$

F

✓

- caso $n+1$

$$(n \neq 0 \rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \; n = m+1) \rightarrow (n+1 \neq 0 \rightarrow \exists m \in \mathbb{N} \; n+1 = m+1)$$

$\dots \rightarrow$ ✓

$\dots \rightarrow$ ✓

✓ ∎

Con $\quad succ : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$n \mapsto n+1$$

è una bigezione fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Def $\forall m,n \in \mathbb{N} \quad m < n \overset{\text{def.}}{\iff} m \in n$

Oss. $m < n+1 \to m < n \vee m = n$

$m \in n \cup \{n\} \to m \in n \vee m \in \{n\}$

Prop. $<$ è una relazione di ordine totale.

- Transitività

$\forall a,b,c \in \mathbb{N} \quad (a<b \wedge b<c) \to a<c$

Ind su c.

- $c=0 \quad (a<b \wedge b<0) \to a<0$

$b \in \emptyset$

$F \to F$

V

- $c+1 \qquad A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C$

$$\big((a<b \wedge b<c) \to a<c\big) \to \big((a<b \wedge b<c+1) \to a<c+1\big)$$

$$\Big(\big((a<b \wedge b<c) \to a<c\big) \wedge a<b \wedge b<c+1\Big) \to a<c+1$$

$b<c \overset{*}{\to} a<c \to a \in c \subseteq c \cup \{c\} \to a<c+1$

$b=c \overset{\triangle}{\to} a<c \to \dots$

- $\forall a \in \mathbb{N} \quad \neg\, a < a$

Ind. su a

- $a = 0 \qquad \neg\, 0 < 0 \leftarrow \neg\, \emptyset \in \emptyset$

- caso $a+1 \qquad \neg\, a < a \rightarrow \neg\, a+1 < a+1$

assumiamo per assurdo $a+1 < a+1$

per l'osservazione si possono dare due casi

$a+1 \underline{<} a \rightarrow a \in a+1 \underline{\in} a \rightarrow a < a$ ⇝

$a+1 = a \rightarrow a \in a+1 = a \rightarrow a < a$ ⇝

- Resta da dim. che

$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a < b \vee a = b \vee b < a.$

Ind su b.

- $b = 0 \qquad \forall a \quad a = 0 \vee 0 < a$

Ind. su a

+ $a = 0$ ovvio.

+ $a+1 \qquad (a = 0 \vee 0 < a) \rightarrow (a+1 = 0 \vee 0 < a+1)$

se $a = 0 \rightarrow a+1 = \{\emptyset\} \ni 0 \rightarrow 0 \in a+1$

se $0 < a \rightarrow \underbrace{0 \in a \subseteq a \cup \{a\}}_{\in} \rightarrow 0 \in a+1$

- caso $b+1$

$$(a<b \vee a=b \vee b<a) \rightarrow (a<b+1 \vee a=b+1 \vee b+1<a)$$

① ② ③ A

① $a<b \rightarrow a<b<b+1 \rightarrow$ A

② $a=b \rightarrow a=b<b+1 \rightarrow$ A

③ Dobbiamo dimostrare

$b<a \rightarrow a=b+1 \vee b+1<a$

Ind su a (b è fissata)

+ $a=0$ $\quad b<0 \rightarrow \ldots$ $\quad$ immediato

$\vdash$

+ caso $a+1$

$$(b<a \rightarrow a=b+1 \vee b+1<a) \rightarrow (b<a+1 \rightarrow a+1=b+1 \vee b+1<a+1)$$

(IG) (*)

assumo $b<a+1$, si danno due casi

a so $b<a \rightarrow b+1=a<a+1 \rightarrow$ (*)

o

$b+1<a<a+1 \rightarrow$ (IG)

a so $b=a \rightarrow b+1=a+1 \rightarrow$ (IG)

IG

Cor. $\forall n \in \mathbb{N} \quad n = \{ a \in \mathbb{N} \mid a < n \}$

Dim sappiamo che

$$a \in \mathbb{N} \to \left(a < n \iff a \in n \right)$$

Ci manca da dim. che $a \in n \to a \in \mathbb{N}$.

Esercizio (ind. su n).

Cor. $\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a \in b \iff a \subseteq b$

Dim esercizio.

Principio di induzione (forma forte)

Sia $\varphi(x)$ una proprietà, allora

$$\left(\forall n \in \mathbb{N} \left(\forall m < n \; \varphi(m) \right) \to \varphi(n) \right) \to \forall n \; \varphi(n)$$

(*)

Dim Consideriamo

$$\varphi(n) \overset{\text{def.}}{\equiv} \forall m < n \; \varphi(m).$$

Dimostriamo $\forall n \; \varphi(n)$ per induzione.

- $n = 0 \quad \forall m < 0 \; \varphi(m)$ VERA A VUOTO.

$$\forall m \quad \underbrace{m < 0}_{F} \to \varphi(m)$$

V

- $n+1$

$$\underbrace{\forall m < n \ \varphi(m)}_{\downarrow (*) \ \varphi(n)} \longrightarrow \forall m < n+1 \ \varphi(m)$$

$$\equiv$$

$m < n$ o $m = n$

$\downarrow$ $\varphi(m)$ $\qquad$ $\downarrow$ ho $\varphi(n)$ per $(*)$

In conclusione abbiamo $\forall n \ \varphi(n) \to \forall n \ \varphi(n+1)$

Osserviamo che $\varphi(n+1) \to \varphi(n)$

$$\forall \underset{n}{m} < n+1 \ \varphi(\underset{n}{m})$$

Quindi $\forall n \ \varphi(n)$ $\blacksquare$