$\leq \subseteq A \times A$ è un ordine totale

"

Def Un insieme tot. ordinato $(A, \leq)$ si dice **ben ordinato** se

$\forall B \subseteq A \quad B \neq \emptyset \rightarrow$ "B ha un minimo"

$\exists x \in B \quad \forall y \in B \quad x \leq y$

Prop $(\omega, \leq)$ è ben ordinato

Dim Dobbiamo dimostrare che per $B \subseteq \omega$

"B non ha un minimo" $\longrightarrow B = \emptyset$

Consideriamo $C = \omega \setminus B$. Vogliamo: $C = \omega$.

Per l'induzione forte ci basta

$$(\forall x < n \quad x \in C) \rightarrow n \in C$$

$\forall x < n \quad x \notin B$

quindi se $n \in B$ allora n è il minimo di B

ma B non ha un minimo $\longrightarrow n \notin B \rightarrow n \in C$



Esempi (anticipazioni) di insiemi b.o.

- ω
- esercizio A è b.o. da $<$ e $B \subseteq A$ allora B è b.o. da $< \cap (B \times B)$
- tutti gli new sono b.o. da $\in$
- $\omega \cup \{\omega\} = \omega + 1$ esercizio: è b.o. da $\in$

$$\bullet < \bullet < \bullet < \cdots < \bullet$$
$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \omega$$

- $\omega \cup \{\omega\} \cup \{\omega \cup \{\omega\}\} = (\omega + 1) + 1$ cf.
- esercizio: se α è b.o. da $\in$ allora $\alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$ è b.o. da $\in$

Operazioni aritmetiche

Per $a, b \in \mathbb{N}$

$$a + 0 = a$$
$$a + (b+1) = (a+b)+1$$
$$a \cdot 0 = 0$$
$$a \cdot (b+1) = a \cdot b + a$$

$$0! = 0$$
$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

Es. $\overset{2}{(0+1+1)} + \overset{2}{(0+1+1)} =$

$$((0+1+1)+(0+1))+1 =$$
$$(((0+1+1)+0)+1)+1 =$$

($0+1+1$)

$$= 0+1+1+1+1$$

Es calcolare $2 \cdot 2$.

Oss. (estensionalità per le funzioni)

Date $f, g : A \to B$

$$f = g \iff \forall x \in A \; f(x) = g(x)$$

Dim Facile esercizio (per estensionalità).

Teo (ricorsione numerabile).

Dato un insieme S, un elemento $c \in S$ e una funzione $h : \omega \times S \to S$ esiste un'unica funzione $f : \omega \to S$ tale che

$$f(0) = c \;\wedge\; \forall n \in \omega \; f(n+1) = h(n, f(n))$$

Es. $c = 1$ $\quad h(n, x) = x \cdot (n+1) \quad \Longrightarrow \quad f(n) = n!$

Dim Vogliamo trovare una formula $\varphi(n, y)$ che dice "$y = f(x)$" poi costruiamo

$$f = \{ (n, y) \in \omega \times S \mid \varphi(n, y) \}$$

(Def) Sia $g : \overset{\{0, \dots, n\}}{n+1} \to S$ diciamo che g è una

n-approssimazione se

$$g(0) = c \;\wedge\; \forall x < n \; g(x+1) = h(x, g(x))$$

$y = f(n)$

$\parallel$

$\varphi(n, y) \overset{def}{\equiv}$ "esiste una n-appr. g t.c. $y = g(n)$"

Dimostriamo che

① $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists$ una n-appr.

② $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists!$ una n-appr.

$\Big\}$ $\forall n\ \exists! y\ \varphi(n, y)$ quindi f è ben definita

③ La funzione f così definita soddisfa la richiesta.

① Per ind.

- caso 0 : $\{(0, c)\}$ è una 0-appr.
- caso $n+1$: Sia g una n-appr., allora $g \cup \{(\underline{n+1}, \underline{b(n, g(n))})\}$ è una $n+1$-appr.

poniamo $\square(n+1) = b(n, g(n))$

② e ③ Esercizio per induzione.

$\blacksquare$

Teo (ricorsione numerabile — v. 2)

Dati S e A, una funzione $c : A \to S$ e una funzione $h : A \times \omega \times S \to S$ esiste un'unica funzione $f : A \times \omega \to S$ tale che

$$\forall a \; f(a,0) = c(a) \;\wedge\; \forall a \forall n \; f(a,n+1) = h(a,n,f(a,n))$$

$(a+)(0) = a$

$(a+)(n+1) = ((a+)(n)) + 1$

$h\big((a+)(n)\big)$

$+ : \omega \times \omega \to \omega$

$A \quad \omega \quad S$

Dim (idea)

Vedo una funzione $f : A \times \omega \to S$ come una funzione $f' : \omega \to S^A$

$\{\text{funzioni } A \to S\} \subseteq \mathcal{P}(A \times S)$

Esercizio c'è una corrispondenza biunivoca

$$C^{A \times B} \to (C^A)^B$$

$f : A \times B \to C \quad \longmapsto \quad f' : B \to C^A$

$f'(b)(a) = f(a,b).$

Applico il teo. precedente con S^A al posto di S.

□

Cor. Esistono $+$ e $\cdot$ che soddisfano la def.

Esercizio (non immediato)

dimostrano per induzione

$a+b = b+a$ $\quad a+(b+c) = (a+b)+c$ $\quad a\cdot(b+c) = ab+ac$

$a\cdot b = b\cdot a$ $\quad a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$

Cardinalità

Def $|A| = |B|$ "A e B hanno la stessa cardinalità"
"A e B sono equipotenti"

se esiste una corrispondenza biunivoca $f : A \to B$

Def $|A| \leq |B|$ se $\exists B' \subseteq B$ $|A| = |B'|$

ossia: $|A| \leq |B|$ se esiste una $f : A \to B$ iniettiva.

Oss.

- $|-| = |-|$ soddisfa le proprietà formali di una relazione di equivalenza

$|A| = |A|$

$|A| = |B| \to |B| = |A|$

$|A| = |B| \wedge |B| = |C| \to |A| = |C|$

- $|-| \leq |-|$ - è riflessiva $|A| \leq |A|$
  - compatibile con $|\cdot| = |\cdot|$
    $|A| = |B| \wedge |B| \leq |C| \to |A| \leq |C|$
    $|A| \leq |B| \wedge |B| = |C| \to |A| \leq |C|$
  - transitiva
    $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |C| \to |A| \leq |C|$

Tro (Cantor - Bernstein)

$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \to |A| = |B|$

Con. $|-| \leq |-|$ soddisfa le proprietà formali di una relazione di ordine sulle cardinalità
"classi di equipotenza"

