Notazione data $f: A \to B$ e $C \subseteq A$

$$f[C] = \{y \in B \mid \exists x \in C \; f(x) = y\}$$
$$= \{f(x) \mid x \in C\}$$

Teo (Cantor - Bernstein)

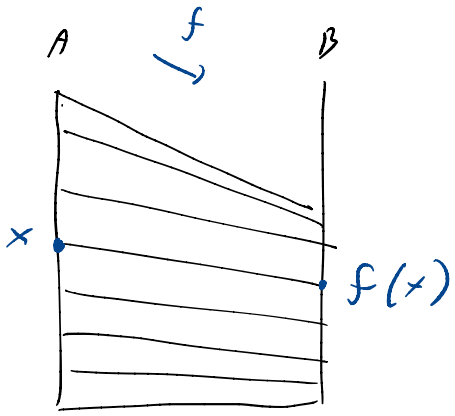
$$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \to |A| = |B|$$

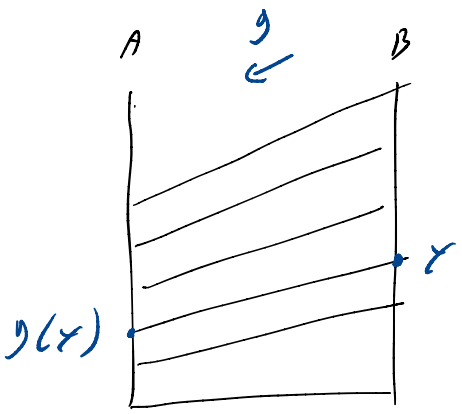
ossia

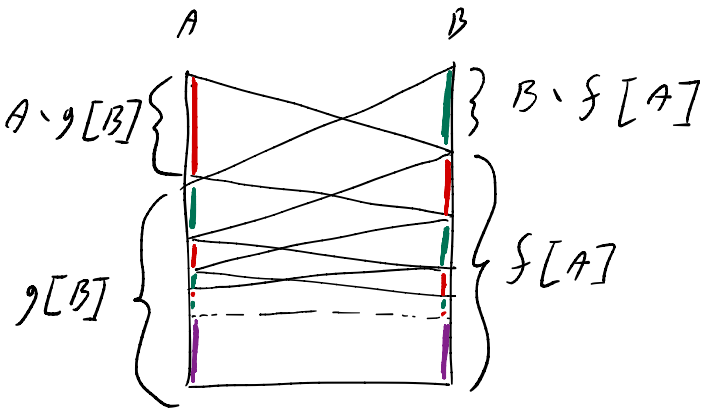
Se esiste $f: A \to B$ iniettiva e $g: B \to A$ iniettiva, allora esiste $h: A \to B$ biunivoca.

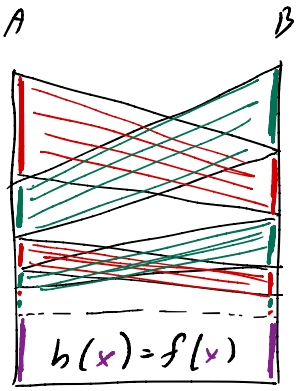
Dim

idea:

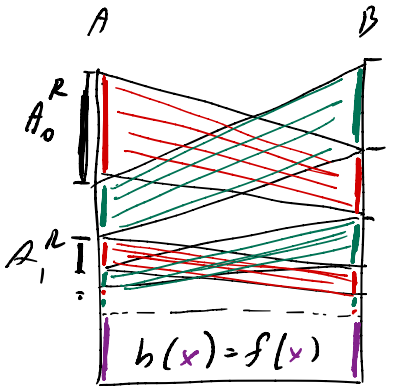








$h(x) = f(x)$ $\quad$ $h(x) = g^{-1}(x)$



Ci basterà definire la sequenza A^R, ossia la funzione

$$w \longrightarrow \mathcal{P}(A)$$
$$n \longmapsto A_n^R$$

dei segmenti di A colorati in rosso nella figura. Per il teorema di ricorsione numerabile, esiste una funzione $w \to \mathcal{P}(A)$ tale che

$$A_0^R = A \setminus g[B] \quad \text{e} \quad \forall n \; A_{n+1}^R = g[f[A_n^R]]$$

Definiamo

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } \exists n \; x \in A_n^R \quad \text{"x è rosso"} \\ g^{-1}(x) & \text{altrimenti} \quad \text{"x non è rosso"} \end{cases}$$

Verifichiamo che h è: ben definita, iniettiva, suriettiva ① ② ③

① Bisogna dire che, nel secondo caso, $g^{-1}(x)$ esiste. Se x non è rosso, in particolare, $x \notin A_0^R = A \setminus g[B]$ quindi $x \in g[B]$ e $g^{-1}(x)$ esiste.

② Supponendo $h(x)=h(y)$ dobbiamo dedurre $x=y$. Intanto se x e y sono entrambi rossi o non-rossi, l'asserto segue dall'iniettività di f o g^{-1} rispettivamente. Assumiamo quindi $x \in A_k^R$ e $\forall n \; y \notin A_n^R$, per cui $y = g(g^{-1}(y)) = g(h(y)) = g(h(x)) = g(f(x))$. Di conseguenza $y \in g[f[A_k^R]] = A_{k+1}^R$ ↝

(3) Dato $y \in B$ dobbiamo trovare $x \in A$ tale che $f(x) = y$.
Se $\exists n$ $y \in f[A_n^R]$, allora $y = f(x)$ per qualche $x \in A_n^R$, per cui $y = h(x)$.
Se $\nexists n$ $y \in f[A_n^R]$, poniamo $x = g(y)$. Onde dimostrare che $y = f(x)$ ci basta dire che $h(x) = g^{-1}(x)$, ossia che x non è rosso. Supponiamo per assurdo $x \in A_k^R$

- se $k = 0$, $g(y) \in A_0^R = A \setminus g[B]$ ossia $g(y) \notin g[B]$ ↯
- se $k \neq 0$, allora possiamo scrivere $k = j+1$, per cui $x \in A_{j+1}^R = g[f[A_j^R]]$, ossia $x = g(f(x'))$ per qualche $x' \in A_j^R$. Quindi: $y = g^{-1}(x) = f(x') \in f[A_j^R]$ ↯ ∎

Esempi (assumendo le proprietà algebriche di $\mathbb{R}$)

- già visto $|Cantor| = |\{\text{sequenze binarie}\}|$
  $2^\omega = \{0,1\}^\omega$
  $x \longmapsto 0.5 + \frac{1}{\pi}\arctan(x)$
- già visto $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$
- $|Cantor| = |\mathbb{R}|$

Dim. $Cantor \subseteq \mathbb{R} \rightarrow |Cantor| \leq |\mathbb{R}|$

$|\mathbb{R}| = |(0,1)| \leq |2^\omega| = |Cantor|$

$x = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ in notazione binaria

- $3^\omega = \{ f : \omega \to \{0,1,2\} \}$

$2^\omega \subseteq 3^\omega \subseteq 4^\omega \quad \to \quad |2^\omega| \leq |3^\omega| \leq |4^\omega| \leq |2^\omega|$

$0\ 2\ 1\ 0\ 3\ \dots\ a$
$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$
$00\ 10\ 01\ 00\ 11\ \dots\ b$

$b_{2i} = \begin{cases} 0 & \text{se } a_i \in 1 \\ 1 & \text{—} \end{cases}$

$b_{2i+1} = \begin{cases} 0 & \text{se } 2 \mid a_i \\ 1 & \text{—} \end{cases}$

Oss. $|\mathcal{P}(X)| = |2^X|$

Dim. $f : \mathcal{P}(X) \to 2^X$

$f(A)(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ 1 & \text{se } x \in A \end{cases}$

$\mathcal{P}(X) \quad X$

è una bigezione

- $|\mathcal{P}(\omega)| = |2^\omega| = |\mathbb{R}|$
- esercizio: $|\omega^\omega| = |\mathbb{R}|$

Notazione $\mathfrak{c} \overset{\text{def.}}{=} |\mathcal{P}(\omega)|$

↑ occhio: non è un insieme!

"cardinalità del continuo"

"potenza del continuo"

Notazione $|A| \neq |B|$

$|A| < |B| \overset{def.}{\equiv} |A| \leq |B| \wedge \neg |A| = |B|$

Tro (Cantor) $\forall X \quad |X| < |2^X|$

Dim equivalentemente $|X| < |\mathcal{P}(X)|$

① (banalmente) $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$

$f : X \to \mathcal{P}(X)$

$a \longmapsto \{a\}$ è iniettiva.

② Per assurdo supponiamo $|X| = |\mathcal{P}(X)|$

quindi esiste $f : X \to \mathcal{P}(X)$ biunivoca

consideriamo

$A = \{ a \in X \mid a \notin f(a) \}$

$A \subseteq X \to A \in \mathcal{P}(X) \to A = f(a)$

$a \in A \longleftrightarrow a \notin f(a) = A$ ↯ ∎

Cor $|\omega| < |2^\omega| = \mathfrak{c}$