Esercizio Sia A tale che la relazione

$$< \stackrel{def.}{=} \{(a,b) \in A \times A \mid a \in b\}$$

è un buon ordine. Supponiamo $A \notin \bigcup A$. Allora la relazione $\in$ è un buon ordine su $A+1 = A \cup \{A\}$.

Soluzione Dobbiamo verificare:

1. $\in$ è un ordine totale su $A+1$
2. ogni $\emptyset \neq B \subseteq A+1$ ha un $\in$-minimo.

(1) Assumiamo che, se $a, b \in A+1$

$$a <_{A+1} b \quad \text{se} \quad a, b \in A \text{ e } a <_A b$$
$$\text{o} \quad a \in A \text{ e } b = A.$$

il primo caso è ovvio.

se $b = A$, $\forall a \in A \quad a <_{A+1} b$

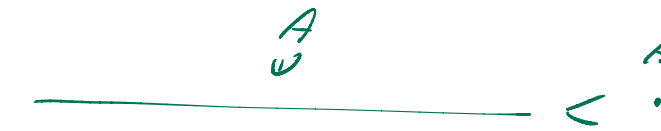
Rimane da verificare che $A \not<_{A+1} A$. Se avessimo $A <_{A+1} A$, avremmo $A \in A$, quindi $A <_A A$ ↯

La totalità segue poiché

$$x \in A+1 \leftrightarrow x \in A \vee x = A$$

(2) $\forall x \in A \quad A \not<_{A+1} x \iff A \notin x \iff A \notin \bigcup A$

(2) Sia $B \subseteq A+1$ non vuoto. Si danno due casi: o $B \cap A \neq \emptyset$ o $B = \{A\}$.
Nel primo caso, sia x il $\in_A$-minimo di $B \cap A$. Allora x è anche $\in_{ON}$-minimo di B.
Nel secondo caso A è il $\in_{ON}$-min. di B.

$A+1 =$ 

PIANO DI BATTAGLIA

aritmetica cardinale — ordinali, ass. rimpiazz.

scelta

classificazione dei b.o.

cardinalità del continuo $\mathfrak{c}$ — ordini completi

cardinalità numerabile $\aleph_0$ — ordini densi numerabili

Insiemi finiti — def. per ricorsione

Operazioni sulle card. — proprietà di $+, \cdot, a^b$ su ω

cardinalità, biiezioni, f. iniettive, etc.

ordini, successore ($+1$), ricorsione, etc.

Def Se $A \cap B = \emptyset$ $|A| + |B| \overset{\text{def.}}{=} |A \cup B|$

$|A| + |B| \overset{\text{def.}}{=} |A \sqcup B|$

Oppure

$|X| = |A| + |B| \overset{\text{def.}}{\longleftrightarrow} \exists A', B' \; |A'| = |A|$
$|B'| = |B|$
$A' \cap B' = \emptyset$
$|X| = |A' \cup B'|$

Oss Dati A, B esistono A', B' con $|A| = |A'|$
$|B| = |B'|$ e $A' \cap B' = \emptyset$

Dim. $A' = A \times \{0\}$ $\quad$ $B' = B \times \{1\}$
$\quad\quad\quad

Def $|A| \cdot |B| \overset{def.}{=} |A \times B|$

Def $|A|^{|B|} \overset{def.}{=} |A^B|$ $\uparrow \{f : B \to A\}$

Oss Le definizioni sono ben date.

Proprietà Siano $|A|\ |B|\ |C|$ cardinalità $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

+ $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$ "ossia:"

$\exists f \ (A \times \{0\} \cup B \times \{1\}) \times \{0\} \cup C \times \{1\}$

$\downarrow$

$A \times \{0\} \cup (B \times \{0\} \cup C \times \{1\}) \times \{1\}$ biunivoca

$\alpha+\beta = \beta+\alpha$ $\qquad \alpha+|\emptyset| = \alpha$

- $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta)\cdot\gamma$ $\qquad \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

$\alpha \cdot |\emptyset| = |\emptyset| \qquad \alpha \cdot |1| = \alpha$

$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

a b $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma} \qquad (\alpha\cdot\beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma \qquad \alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$

$\alpha^{|\emptyset|} = |1| \qquad \alpha^{|1|} = \alpha \qquad |1|^\alpha = |1|$

$\alpha+\beta = \alpha+\gamma \not\Rightarrow \beta = \gamma$

$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$ ossia:

$\exists f \quad (A\times\{0\} \cup B\times\{1\})\times\{0\} \cup C\times\{1\}$ ①

$\downarrow$

$A\times\{0\} \cup (B\times\{0\} \cup C\times\{1\})\times\{1\}$ ② biunivoca

$x \in$ ① se $x=((a,0),0)$ con $a\in A$

o $x=((b,1),0)$ con $b\in B$

o $x=(c,1)$ con $c\in C$

$f:$ ① $\longrightarrow$ ②

$$f(x) = \begin{cases} (a,0) & \text{se } x=((a,0),0) \\ ((b,0),1) & \text{se } x=((b,1),0) \\ ((c,1),1) & \text{se } x=(c,1) \end{cases}$$

$\alpha^{|||} = \alpha$

$|A^{\{\emptyset\}}| = |A|$

$f \longrightarrow f(\emptyset)$

$\underbrace{(\emptyset \mapsto x)}_{\{\emptyset\}\to A} \longleftarrow x$

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

$$|(A^B)^C| = |A^{D \times C}|$$

$$F : (A^B)^C \longrightarrow A^{D \times C}$$

$$f \longmapsto f'$$

$$f' : D \times C \to A$$

$$(b, c) \mapsto f(c)(b)$$

$$F^{-1} : A^{B \times C} \longrightarrow (A^B)^C$$

$$g \longmapsto g'$$

$$g' : C \to A^D$$

$$c \longmapsto \underbrace{(b \mapsto g(b, c))}_{B \to A}$$

Esercizio completare le verifiche

Cardinalità finito

Def X è **finito** sse $\exists n \in \omega \; |X| = |n|$

ed è **infinito** altrimenti.

Teo (principio dei cassetti)

Se X è finito e $Y \subsetneq X$ allora $|Y| < |X|$.

Ossia X e Y non possono essere messi in corrispondenza biunivoca.

Dim.

Osserviamo che basta dimostrare l'asserto assumendo $X \in \omega$.

Infatti se $f : n \to X$ è biunivoca con $n \in \omega$ e $Y \subsetneq X$ con $|Y| = |X| = |n|$ allora $f^{-1}[Y] \subsetneq n$ e $|f^{-1}[Y]| = |Y| = |n|$.

Dimostriamo l'asserto per $X = n$ per induzione. La proposizione da dimostrare è quindi:

$$\varphi(n) \overset{\text{def.}}{\equiv} \nexists Y \subsetneq n \quad |Y| = |n|$$

- $\varphi(\emptyset)$: $\nexists Y \subsetneq \emptyset$ ... vera a vuoto perché $\emptyset$ non ha sottoinsiemi propri.

- $\varphi(n) \to \varphi(n+1)$

  assumiamo $\nexists Y' \subsetneq n \quad |Y'| = |n|$

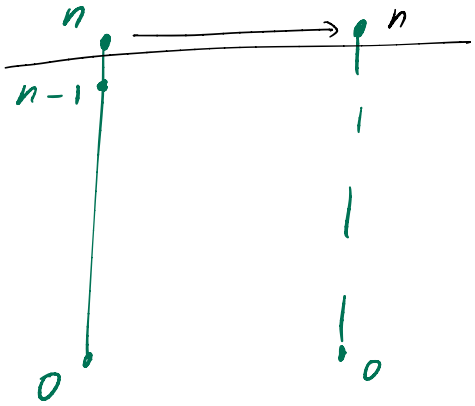
  supponiamo per assurdo che esistano:

  $$Y \subsetneq n+1 \qquad f : n+1 \to Y \text{ biv.}$$

  vogliamo costruire $f' : n \to Y' \subsetneq n$ biviniroca, così negando l'ipotesi induttiva.

- primo caso: $f(n) = n$

  $f|_{n=\{0,\dots,n-1\}}$ è una biiezione fra n e $Y \cap n \subsetneq n$

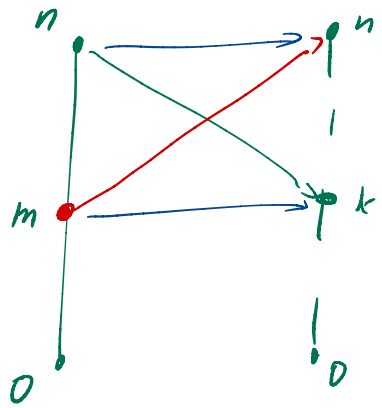


- secondo caso: $k = f(n) < n$

  - caso 2.1: $\exists\, m \in n+1 \quad f(m) = n$

    allora chiaramente $m \in n$

    $$f' : n \longrightarrow n$$
    $$x \longmapsto \begin{cases} k & x = m \\ f(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

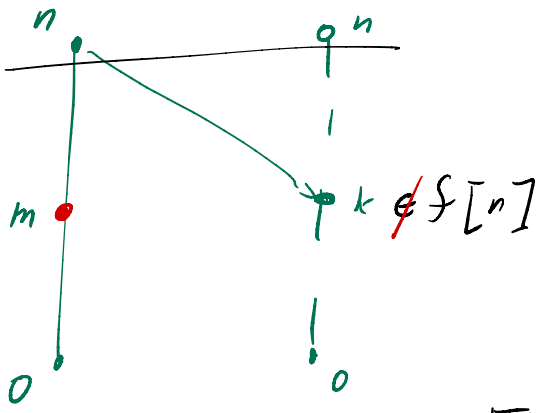


è iniettiva e $f'[n] = Y \cap n \subsetneq n$.

- caso 2.2: $n \in f[n+1]$

$f|_n$ è una biiezione

fra n e $Y \setminus \{k\}$ $\not\subseteq n$.



∎