Cardinalità finito

Def X è **finito** sse $\exists n \in \omega \; |X| = |n|$

ed è **infinito** altrimenti

Teo (principio dei cassetti)

Se X è finito e $Y \subsetneq X$ allora $|Y| < |X|$

Ossia X e Y non possono essere messi in corrispondenza biunivoca.

Cor

Sia X finito allora $\exists! n \in \omega \; |X| = |n|$

Dim

Per assurdo se $m < n$ e $|m| = |X| = |n|$

ma questo contraddice $m \subsetneq n$. ∎

Prop. Se X infinito allora $\forall n \in \omega \; |n| < |X|$

Dim Basta dimostrare $\leq$ $(|n| < |n+1| \leq |X|)$

Quindi dobbiamo dim. che:

$\forall n \in \omega$ esiste $f : n \to X$ iniettiva

Induzione su n.

caso $n=0$: vuoto

caso $n+1$: sia $f : n \to X$ iniettiva (per ip. induttiva). Siccome X è infinito $\exists k \in X \setminus f[n]$

Definiamo

$$f' = f \cup \{(n, k)\}$$

$$f' : n+1 \longrightarrow X$$

$$x \longrightarrow \begin{cases} f(x) & x < n \\ k & x = n \end{cases}$$

∎

Domanda Se X è infinito, possiamo trovare $f : \omega \to X$ iniettiva?

$f_1 : 1 \to X$

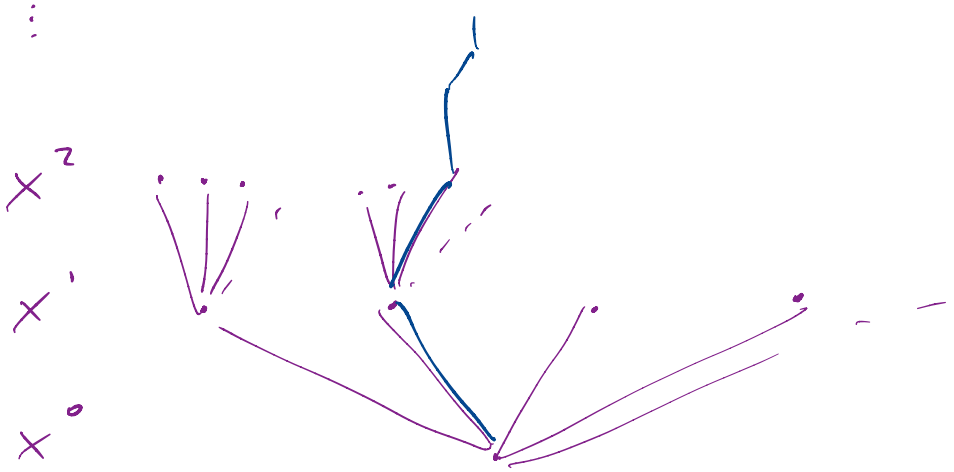
$f_2 : 2 \to X$

$f_3 : 3 \to X$

$\vdots$

$\omega \to \dots$

$i \longmapsto f_i$



Corollari

- $X \subseteq Y$ e Y è finito allora X è finito.

  dim.
  per assurdo supponiamo X infinito

  $$|Y| < |X| \leq |Y| \rightarrow |Y| < |Y| \quad \lightning$$

- $f : X \to Y$ e X finito $\rightarrow f[X]$ finito

  dim. esercizio

Prop Siano $n, m \in \omega$

- $|n| + |m|$
- $|n| \cdot |m|$
- $|n|^{|m|}$

} sono finite

Dim

① $|n| + |1| = |n+1|$ è finita

verifica: $|n| + |1| = |n+1|$

② $|n| + |m|$ è finita per ind. su m

- $|n| + |0| = |n|$ è fin.
- $|n| + |m+1| = |n| + (|m| + |1|) =$

  $= (|n| + |m|) + |1|$ è fin. per ①

③ $|n| \cdot |m|$ ..... ind su m

- $|n| \cdot |m+1| = |n| \cdot (|m| + |1|) =$

$= |n| \cdot |m| + \underbrace{|n| \cdot |1|}_{|n|}$ fin. ②

④ $|n|^{|m|}$ facile esercizio

Possiamo definire le operazioni su $\mathbb{N}$

$a = b + c \quad \leftrightarrow \quad |a| = |b| + |c|$

etc.

$a + 0 = a$ $\qquad$ $a \cdot 0 = 0$

$a + (b+1) = (a+b) + 1$ $\qquad$ $a(b+1) = ab + a$

Verifica $+, \cdot$ soddisfano la rispettiva def. ricorsiva, quindi coincidono con le rispettive funzioni definite usando il teo di ricorsione.

$a + 0 = a$ ✓

$$a+(b+1) = (a+b)+1$$

$$|a|+(|b|+|1|) = (|a|+|b|)+|1|$$

ovvio per associatività

esercizio: verifica per il $\cdot$. $\blacksquare$

<u>Esercizio</u> $\forall a,b \in \omega \quad a \leq b \Leftrightarrow \exists!\, \overset{b-a}{c} \quad a+c=b$

$\downarrow$ corso di aritmetica $\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

<u>Def</u> Sia $\sim \subseteq X \times X$ rel. di equivalenza su X,

per $a \in X$ $\quad [a]_\sim \overset{def}{=} \{x \in X \mid x \sim a\} \subseteq X$

$$X/_\sim = \{[a]_\sim \mid a \in X\} \subseteq \mathcal{P}(X).$$

<u>Def</u> $(\mathbb{Z})$ $\quad (a,b) \in \omega \times \omega \quad$ "$b-a$"

$$(a,b) \sim (a',b') \overset{def}{\longleftrightarrow} a+b' = a'+b$$

"$b-a = b'-a'$"

$$\mathbb{Z} \overset{def.}{=} \omega \times \omega /_\sim$$

$$(a,b)+(a',b') \overset{def.}{=} (a+a', b+b')$$

$$(a,b)\cdot(a',b') \overset{def.}{=} (a\cdot a'+b\cdot b', a\cdot b'+ba')$$

$$(b-a)\cdot(b'-a') = aa'+bb'-ab'-ba'$$

oss. Verificare che $+, \cdot$ funzionano

- sono ben definite
- rendono $\mathbb{Z}$ un anello commutativo con 1
- $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ iniettivamente mediante $n \longmapsto (0, n)$ + r.

Def $(\mathbb{Q})$ $(a, b) \sim (a', b') \iff ab' = ba'$

$$\mathbb{Q} = \frac{\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})}{\sim}$$

Esercizio definire $+, \cdot, <$ e verificare l'algebra elementare.

Esercizio La relazione $<$ su $\mathbb{Q}$ è un ordine denso.

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \quad a < b \to \exists c \in \mathbb{Q} \quad a < c < b.$$

Cardinalità $\aleph_0$

$\aleph_0$ = def.

Def X è "al più numerabile" se $|X| \leq |\omega|$

ossia se esiste $f: X \to \omega$ iniettiva.

Prop $|X| \leq |\omega| \iff X$ è finito o $|X| = |\omega|$

Dim Basta dimostrare che

$X \subseteq \omega$ e X è infinito $\longrightarrow |X| = |\omega|$

$f(0)$ $f(1)$ $f(2)$ $f(3)$

$\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Definiamo $f: \omega \to X$ iniettiva

$f(0) = \min(X)$

$f(n+1) = \min(\{x \in X \mid x > f(n)\})$

Dimostriamo che $a < b \to f(a) < f(b)$

per induzione su b.

- caso $b = 0$ ✓
- passo induttivo $a < b+1 \to f(a) < f(b+1)$

$$a < b+1 \to f(a) < f(b+1)$$

- $a = b$ $\quad f(a) < f(a+1)$ ✓ per def.
- $a < b$ $\quad f(a) < f(b) < f(b+1)$

($f(a) < f(b)$: ipotesi induttiva.)

Quindi abbiamo visto che

$$|w| \leq |X| \leq |w| \qquad \blacksquare$$

Oss. Se $|X| \leq \aleph_0$ e $f : X \to Y$ allora

$$|f[X]| \leq \aleph_0.$$

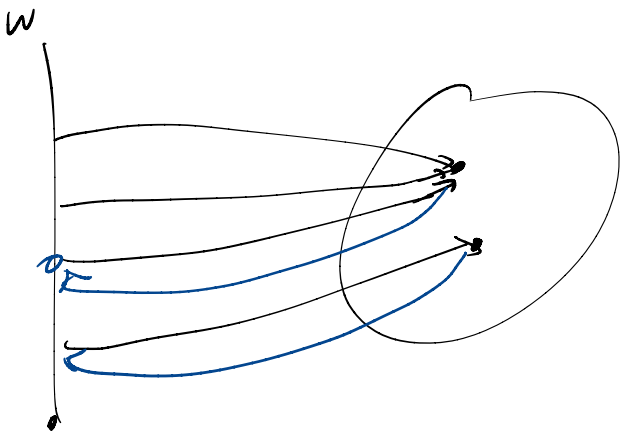
Dim. Facciamo il caso $|X| = \aleph_0$ (caso finito per esercizio).

Basta dimostrare che se $f : w \to Y$ allora $|f[w]| \leq \aleph_0$.

$$g : f[w] \longrightarrow w$$
$$y \longmapsto \min(\{x \in w \mid f(x) = y\})$$

g è iniettiva ($f|_{\_}$ è la sua inversa) quindi

$$|f[w]| = |\underbrace{g[f[w]]}_{\subseteq w}| \leq \aleph_0 \qquad \blacksquare$$



Prop $\lambda_0 + \lambda_1 = \lambda'_0 \cdot \lambda'_0 = \lambda'_0$