Notazione: per new scriviamo n in luogo di $|n|$ quando il contesto è chiaro.

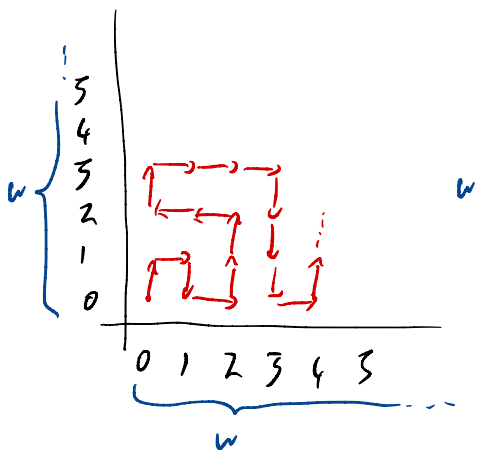
Teo $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0' \cdot \aleph_0' = \aleph_0'$

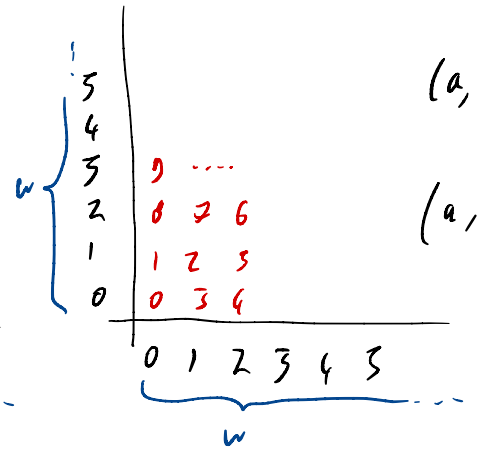
Dim $\aleph_0 \leq \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0' \cdot 2 \leq \aleph_0' \cdot \aleph_0' = \aleph_0$

quindi basta la proposizione seguente

Prop. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

ossia: esiste una biiezione fra $w \times w$ e w.





$w \times w \to w$

$(a,b) \longmapsto 2^a(2b+1) - 1$

$(a,b) \longmapsto \dfrac{(a+b)^2 + 3a + b}{2}$

↑ biunivoche

$(a,b) \to p_a^{b+1}$ è iniettiva

↑ a-esimo primo

Prf. Siano $(A, <)$ e $(B, \lhd)$ insiemi ordinati, diciamo che $f: A \to B$ è un isomorfismo di ordini se f è biunivoca e

$\forall x, y \in A: f(x) \lhd f(y) \Leftrightarrow x < y$

$A \times A$ $B \times B$

Oss se f è un iso di ordini anche f^{-1} lo è.

Es: Siano $(A, <)$ e $(B, \prec)$ insiemi finiti e totalmente ordinati, supponiamo $|A| = |B|$ allora $(A, <) \sim (B, \prec)$

↑ def: "sono isomorfi"

Soluzione (idea della)

(1) Ogni ordine totale finito è un buon ordine.

(2) Definisco l'iso mappando il minimo di A nel minimo di B, e ricorsivamente gli altri elementi.

$\exists k \in \omega \ \forall x \in X \ x \leq k$

Oss: Sia $X \subseteq \omega$ se X è superiormente limitato allora X ha un massimo.



Dim per induzione su k (esercizio).

$k+1$ ↗ X è s.l. da k ?

↘ no → $k \in X$ → k è il max di X ?

Prop Sia $(A, <)$ un insieme b.o. senza un massimo, t.c. ogni $X \subseteq A$ sup. lim. ha un max.

Allora $(A, <) \sim (\omega, \in)$

Dim $\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$A = \{f(0) = \min(A),\ f(1) = \min > f(0),\ \text{e.c.} \dots\}$

Definiamo per ricorsione $f : \omega \to A$

$f(0) = \min(A)$

$f(n+1) = \min(\{x \in A \mid x > f(n)\})$

(1) f è iniettiva

(2) f è suriettiva

(3) f è un iso di ordini

Basta dimostrare (A) f è crescente

(B) f è surgettiva

(A) vuole alla dim. vista ieri

$a < b \to f(a) < f(b)$ per ind. su b

punto chiave

ip. ind. costruzione

$a < b+1 \to$ o $a < b \to f(a) < f(b) < f(b+1)$

o $a = b \to f(a) = f(b) < f(b+1)$

(B) suriettività

Sia $y \in A$.

(1) $\exists k \in \omega \quad f(k) \geq y$

altrimenti y maggiora $\{f(k) \mid k \in \omega\}$

quindi $\exists k_0$ t.c. $f(k_0)$ è il max di $\uparrow$

ma $f(k_0+1) > f(k_0)$ ↯

Fissiamo questo k

(2) Se $x \in \omega$ e $f(x) \leq y$ allora $x \leq k$.

Quindi $\{x \in \omega \mid f(x) \leq y\}$ è sup. lim.

(3) Definiamo $g(y) = \max\{x \in \omega \mid f(x) \leq y\}$

Tesi: $f(g(y)) = y$.

Altrimenti $f(g(y)) < y$

$$f(g(y)+1) = \min\{y' \mid y' > \underbrace{f(g(y))}_{\in y}\}$$

$\leq y$ ↯ $\blacksquare$

Prop. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

Ci basta esibire un ordinamento su $\omega \times \omega$ che sia un b.o. senza max, in cui ogni $X \subseteq \omega \times \omega$ sup. lin. ha un max.

Da questo otteniamo $(\omega \times \omega, \prec) \sim (\omega, \in)$ quindi in particolare c'è una bigezione.

$\omega \times \omega$ $\omega \times \omega$

$(a,b) \prec (a',b') \iff_{\text{def}} a+b < a'+b' \vee \left(a+b = a'+b' \wedge a < a'\right)$

Verifica.

- ordinamento totale: ESERCIZIO
- b.o. Sia $S \subseteq \omega \times \omega$ $S \neq \emptyset$.
  Considero $\min n \in \omega$ t.c. $\exists (a,b) \in S \quad a+b = n$.
  Considero $\min a \in \omega$ t.c. $\exists (a,b) \in S \quad a+b = n$
  Osservo che $(a, n-a)$ è il min. di S.
- non ha max. $(a,b) \prec (a+b+1, 0)$
- sottoinsiemi sup. lin. ha max
  ESERCIZIO: come il primo b.o.

Cor. $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono numerabili.

Dim. $\omega \leq |\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{Q}|$

$$f : \omega \times (\omega \setminus \{0\}) \times 2 \to \mathbb{Q} \quad \text{suriettiva.}$$

$$(a, b, c) \longmapsto (-1)^c \frac{a}{b}.$$

$$\omega \times (\omega \setminus \{0\}) \times 2 \subseteq \omega \times \omega \times \omega$$

∎

Prop. (al più numerabile)

Sia X un insieme di insiemi al più numerabili

Sia $f : X \to (\cup X)^{\omega}$ una famiglia di enumerazioni degli elementi di X.

$A \longmapsto f_A$

$f : \omega \to A$

↑ suriettiva.

Allora $\cup X$ è al più numerabile.

Dim.

idea. $X \begin{cases} A_0 = \{a_{0,0}, a_{0,1}, \dots\} \\ A_1 = \{a_{1,0}, a_{1,1}, \dots\} \\ A_2 = \{\dots\} \end{cases}$

$$\cup X = \{a_{i,j} \mid (i,j) \in \omega \times \omega\}$$

Definiamo $g : \omega \times \omega \to \bigcup X$ surgettiva.

Fissiamo $h : \omega \to X$ surgettiva.

$$a_{i,j} = g(i,j) \overset{\text{def.}}{=} f_{h(i)}(j)$$

Sia $y \in \bigcup X$,

allora $\exists A \in X \quad y \in A$

$\exists i \in \omega \quad A = h(i)$

$\exists j \in \omega \quad f_A(j) = y$

$\to g(i,j) = \dots = y$ ☐

Prop Sia X (al più) numerabile, allora l'insieme dei sottoinsiemi finiti di X è (al più) numerabile.

Dim Sia $X_n \in \{S \in \mathcal{P}(X) \mid 0 < |S| \leq n\}$.

Dobbiamo dim. che $\{\emptyset\} \cup \bigcup \{X_n \mid n \in \omega\}$ è al più numerabile. Ci basta costruire una famiglia di enumerazioni degli X_n.

Fissiamo $f : w \to X$ suriettiva

$g : V \to w \times w$ "

$\alpha \mapsto (g_1(\alpha), g_2(\alpha))$

Costruiamo per ricorrenza

$h_0 = \emptyset$

$h_{n+1} : w \to X_{n+1}$

$\alpha \mapsto h_n(g_1(\alpha)) \cup \{f(g_2(\alpha))\}$

Dim. per induzione che $h_n : w \to X_{n+1}$ è su.

- caso 0: $X_0 = \emptyset$ ✓

- caso $n+1$: sia $S \in X_{n+1}$, allora

scrivo $S = S' \cup \{\alpha\}$ con $S' \in X_n$

($S' = h_n(g)$, $\alpha = f(p)$)

sia α t.c. $g(\alpha) = (g, p) \to S = h_{n+1}(\alpha)$. ☒

Esercizi:

- $|\mathbb{Q}[x]| = \aleph_0$ (polinomi)
- $|\overline{\mathbb{Q}}^{alg.}| = \aleph_0$
- $w^{<w} \overset{def.}{=} \bigcup \{w^n \mid n \in w\}$ $\quad |w^{<w}| = \aleph_0$