$|X| = \aleph_0 \iff \exists f : \omega \to X$ biunivoca

$X = \{ \underbrace{f(k)}_{\text{def}} = x_k \mid k \in \omega \}$

Oss. Se $|X| = \aleph_0$ può essere rappresentato come

$X = \{ x_k \mid k \in \omega \}$

$x_- : \omega \longrightarrow X$

$k \longmapsto x_k$

Es. $|\mathbb{Q}[x]| = \aleph_0$ (polinomi) $\qquad |\mathbb{Q}^{\omega}| = |\omega^{\omega}| = \mathfrak{c}$

$f : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}^{\omega}$

$2 + 3x + x^3 \longmapsto 2, 3, 0, 1, 0, 0, \ldots$

$$2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

$f : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow$ sottoins. finiti di $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$

$p \longmapsto \{(q,n) \mid q \cdot x^n$ è un monomio di $p\}$

es. $2 + 3x + x^3 \longmapsto \{(2,0), (3,1), (1,3)\}$

$|\text{sottoins. finiti di } \underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{N}}_{\text{numerabile}}| = \aleph_0 \Rightarrow |\mathbb{Q}[x]| \leq \aleph_0$

d'altro canto $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}[x]$, quindi $= \aleph_0$ ∎

Come enumerare i polinomi di grado d?

$$|\mathbb{Q}[x]^{\deg \leq d}| = |\mathbb{Q}^{d+1}|$$

fisso $g : w \to w \times w$ biunivoca $h : w \to \mathbb{Q}$ biunivoca

$$f_{d+1} : w \to \mathbb{Q}^{d+1}$$

$$n \longmapsto \underbrace{q_0 \dots q_{d-1}}_{f_d(g_0(n))} \; \underbrace{q_d}_{h(g_1(n))}$$

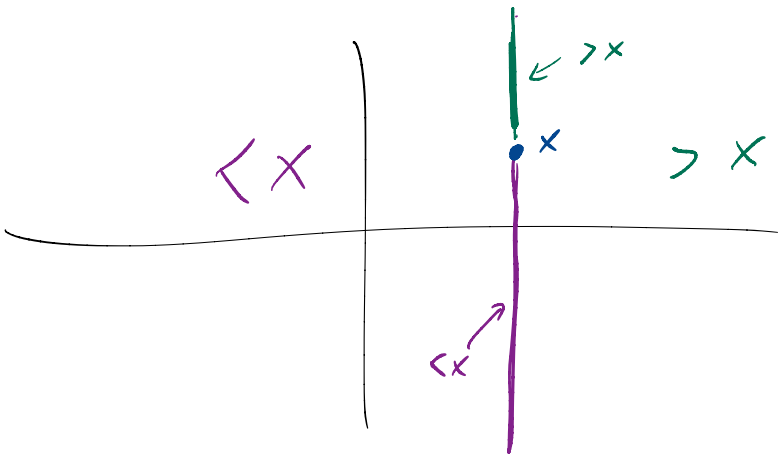
$$|\overline{\mathbb{Q}}^{alg.}| = \aleph_0$$

$$f : \mathbb{Q}[x] \times \omega \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^{alg.}$$

$$p(x), n \longmapsto \text{l'n-esima radice di } p(x) \text{ se c'è, altrimenti } 0. \quad *$$

f è surgettiva $\rightarrow$ $\overline{\mathbb{Q}}^{alg.} = f[\underbrace{\mathbb{Q}[x] \times \omega}_{\text{numerabile.}}]$ ☐

$*$ $\quad a+ib < a'+ib' \overset{def.}{\longleftrightarrow} a<a' \vee (a=a' \wedge b<b')$



Def Sia $(A, <)$ totalmente ord., $B \subseteq A$.

B è *denso in* A se

$$\forall x, y \in A \quad x < y \longrightarrow \exists z \in B \quad x < z < y$$

A è denso se A è denso in se stesso.

Oss $\mathbb{Q}$ è denso: $x < y \longrightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$

Teo Sia $(A, <)$ numerabile, denso, senza estremi

$|A| = \aleph_0$ ~~$\exists x \in A \ \forall y \in A \ x \geq y$~~ $\leq$

non ha max o min

allora $(A, <) \sim (\mathbb{Q}, <)$.

Oss Sia $F \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$ tale che ogni elemento di F è una funzione. Supponiamo che

$$\forall f_1, f_2 \in F \ \forall x \in dom(f_1) \cap dom(f_2) \quad f_1(x) = f_2(x)$$

Allora $\bigcup F$ è una funzione.

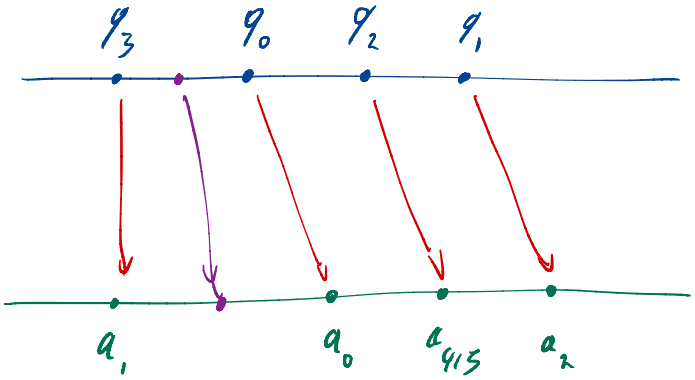
Dim Sia $x \in dom(\bigcup F) \xrightarrow{?} \exists! y \ (x, y) \in \bigcup F$

per assurdo supponiamo $\exists y_1, y_2 \ y_1 \neq y_2$ ....

allora $\exists f_1, f_2 \in F \quad (x, y_1) \in f_1 \wedge (x, y_2) \in f_2$

ma allora $x \in dom(f_1) \ x \in dom(f_2) \ f_1(x) = f_2(x)$ $\rightarrow\leftarrow$

Dim (teo)



$\mathbb{Q} = \{q_0, q_1, q_2, q_3, \dots\}$

$A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$

Fissiamo le enumerazioni di $\mathbb{Q}$ e A

$$\mathbb{Q} = \{q_i \mid i \in \omega\} \qquad A = \{a_i \mid i \in \omega\}$$

Vogliamo costruire una sequenza di funzioni $\{f_i\}_{i \in \omega}$ con le seguenti proprietà

1. $\forall i \quad f_i : Q_i \to A_i$ con $|Q_i| = |A_i| < \aleph_0$
2. $\forall i \quad f_i$ è un iso di ordini fra Q_i e A_i
3. $\forall i \quad f_i \subseteq f_{i+1} \xrightarrow{\text{facile ind.}} \forall i \leq j \quad f_i \subseteq f_j$
4. $\bigcup \{\mathrm{dom}\, f_i \mid i \in \omega\} = \mathbb{Q}$

   $\bigcup \{\mathrm{im}\, f_i \mid i \in \omega\} = A.$

oss. 1 ... 4 $\longrightarrow f = \bigcup \{f_i \mid i \in \omega\}$ è l'iso cercato.

$x, y \in \mathbb{Q} \quad x < y \quad f(x) > f(y)$

$\hookrightarrow \exists\, i, j \quad x \in \mathrm{dom}(f_i),\ y \in \mathrm{dom}(f_j)$

$\hookrightarrow x, y \in \mathrm{dom}(f_{\max(i,j)})$

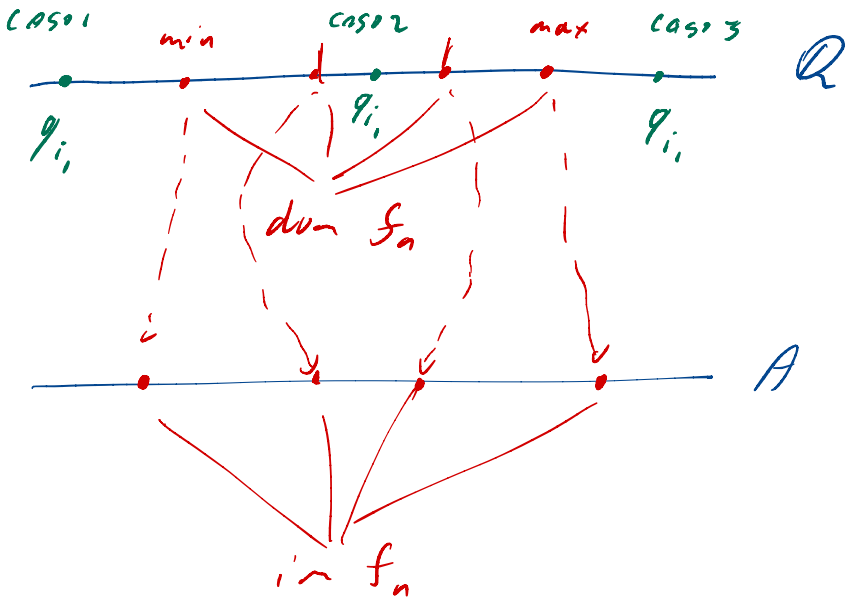
$\hookrightarrow f(x) = f_{\max(i,j)}(x) < f_{\max(i,j)}(y) = f(y)$ ↯

Costruiamo le f_i per ric. num. $\underline{f_0 = \emptyset}$

$\underline{f_{n+1}$ a partire da f_n}

Sia $i_1 = \min \{ i \mid q_i \notin \mathrm{dom}(f_n) \}$

Sia $J_1 = \min \{ J \mid f_n \cup \{(q_{i_1}, a_J)\}$ è un iso di ordini$\}$



Sia $J_2 = \min \{ J \mid a_J \notin \mathrm{im}(f_n) \cup \{a_{J_1}\} \}$

Sia $i_2 = \min \{ i \mid f_n \cup \{(q_{i_1}, a_{J_1}), (q_i, a_{J_2})\}$ sia iso. $\}$

definisco $f_{n+1} = f_n \cup \{(q_{i_2}, a_{J_1}), (q_{i_2}, q_{J_2})\}$.

---

(1) ... (3) immediato per costruzione

(4) $\leftarrow$ $\forall n$ $\{q_i \mid i < n\} \subseteq \mathrm{dom}\, f_i$

$\{a_i \mid i < n\} \subseteq \mathrm{im}\, f_i$

$\blacksquare$