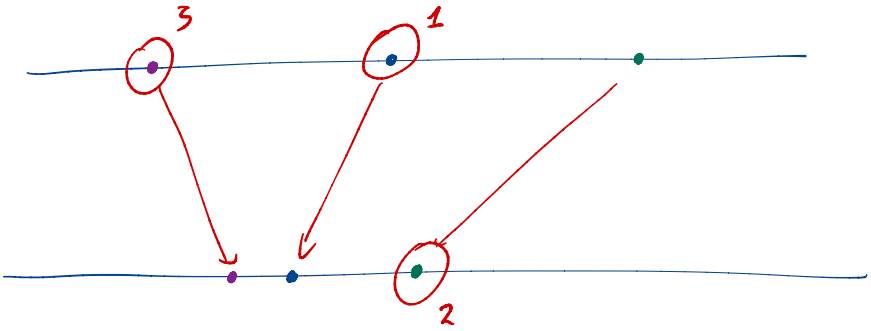
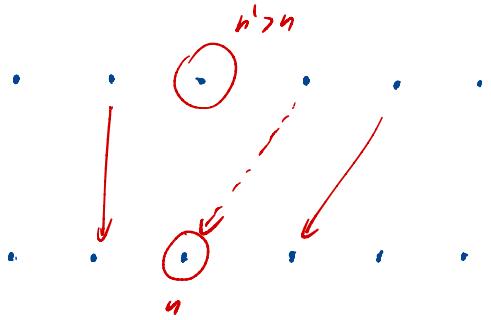
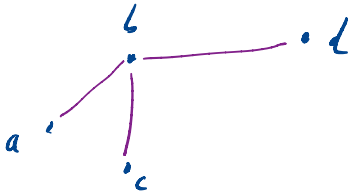




Def Un grafo su X è un $Y \subseteq X \times X$ t.c.

- $\forall x \in X \quad (x,x) \notin Y$
- $\forall x,y \in X \quad (x,y) \in Y \to (y,x) \in Y$



$X = \{a, b, c, d\}$

$Y = \{(a,b), (b,a), (c,b), (b,c), (d,b), (b,d)\}$

Def Il grafo Y su X e il grafo Y' su X' sono isomorfi se esiste

$f : X \to X'$ biunivoca

$\forall x,y \in X \quad (x,y) \in Y \longleftrightarrow (f(x), f(y)) \in Y'$

Il "grafo random" o "grafo di Rado"

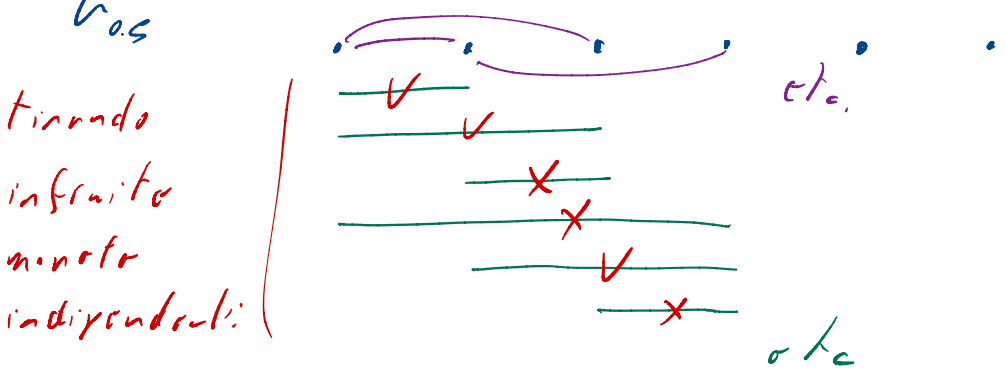
Informalmente costruiamo $G_p \subseteq \omega \times \omega$:

per ogni $i \neq j \in \omega$ poniamo $(i,j), (j,i) \in G_p$

con probabilità p, e $\notin$ con prob. $1-p$.

Tutto scelto indipendentemente.

$G_{0.5}$



Fatto: Con prob. 1 vicar sempre lo stesso grafo a meno di isomorfismi INDIPENDENTEMENTE da $0 < p < 1$!

Def un grafo G su ω è un grafo random

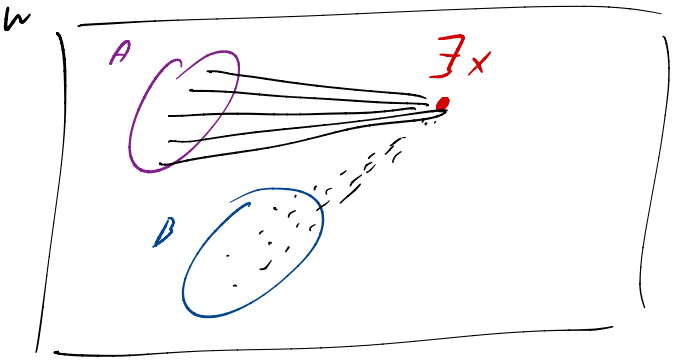
se $\forall A, B \subseteq \omega$

$$\left.\begin{array}{l} |A|, |B| < \aleph_0 \\ A \cap B = \emptyset \end{array}\right\} \to \exists x \in \omega \setminus (A \cup B)$$

$$\forall a \in A \ (x,a) \in G$$

$$\forall b \in B \ (x,b) \notin G$$

$\forall A, B$ finiti e disgiunti:



Es* Dimostrare che esiste un grafo random ed è unico a meno di isomorfismi

---

Es. Quali sono i possibili ordini totali numerabili donsi a meno di iso.?

Sia $(X, <)$ un ordine totale

$Y \subseteq X$ è sup. lin. se $\exists x \in X \; \forall y \in Y \; y \leq x$.

Se $\forall y \in Y \; y \leq x$ x è un maggiorante di Y

L'estremo superiore $(\sup X)$ di Y è il minimo dei maggioranti di Y — se esiste.

Def Un ordine totale $(X, <)$ è completo se ogni $Y \subseteq X$ superiormente limitato ha un estremo superiore.

Eg. Usando le proprietà di $+, \cdot, <$ su $\mathbb{Q}$.
Dimostrare che $\sup\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ non esiste.

Nota: non basta scrivere

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \Rightarrow$ riduci ai minimi termini

$\Rightarrow$ blab blab $\Rightarrow$ assurdo.

Con (dall'esercizio) $(\mathbb{Q}, <)$ non è completo.

Def Sia $(X, <)$ ord. totale. $Y \subseteq X$ è un

segmento iniziale di $(X, <)$ se

$$\forall y \in Y \ \forall z \in X \ z < y \to z \in Y$$



Segmento iniziale **proprio** se $Y \neq X$

Def Sia $(X, <)$ ord. totale. Una **sezione**

su X è un segmento iniziale Y

- proprio $Y \neq X$
- non vuoto $Y \neq \emptyset$
- senza un massimo $\forall y \in Y \ \exists z \in Y \ y < z$

Def $\mathbb{R} = \{\text{sezioni su } \mathbb{Q}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$

Oss La relazione di $\subseteq$ è un ordine tot. sui segmenti iniziali di $(X, <)$.

Dim
- $\subseteq$ è sempre un ordine parziale
- per assurdo $A \not\subseteq B$ $B \not\subseteq A$

  $x \in A \setminus B$ $y \in B \setminus A$

  - $x < y \to$ siccome $y \in B$ abbiamo $x \in B$ ↯
  - $y < x \to$ assurdo simmetrico

□

Cor $\mathbb{R}$ è totalmente ordinato da

$$\leq = \{(A, B) \mid A \subseteq B\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Prop Esiste $qr : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ crescente tale che $qr[\mathbb{Q}]$ è densa in $\mathbb{R}$.

Dim

$$qr(q) \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}$$

verifichiamo

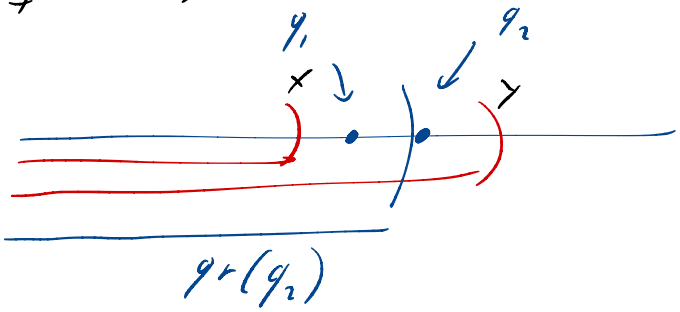
- crescente

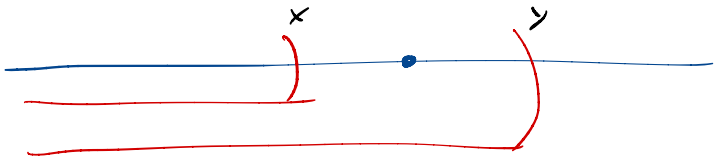
$$q_1 < q_2 \iff x < q_1 \to x < q_2 \iff qr(q_1) \subsetneq qr(q_2)$$

$$\iff q_1 \in qr(q_2) \quad q_1 \notin qr(q_1)$$

□

- $qr[\mathbb{R}]$ dove a





Siano $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \leq y$.

se $\exists\, q_1, q_2 \in y \setminus x$ $q_1 < q_2$ allora

$$x \leq qr(q_2) \leq y$$

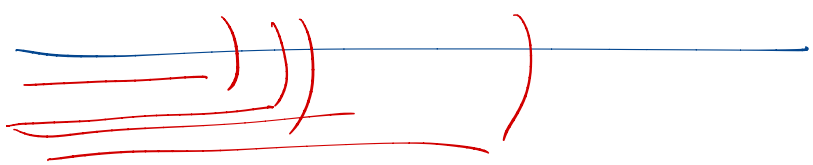
$q_1, q_2 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_1, q_2$

altrimenti $\exists! q \in y \setminus x$, allora q sarebbe il massimo di x ↯ ∎

Prop $\mathbb{R}$ è completo

Dim Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ non $\emptyset$ e sup. lim. da $k \in \mathbb{R}$.

$$\sup X = \bigcup X.$$



unisco.

- $\bigcup X$ è un s.i. proprio. $\to \bigcup X \in \mathbb{R}$

un unione di s.i. è un s.i.

$a \in \bigcup X \to \exists\, x \in X \quad a \in x$

$b < a \to b \in x \to b \in \bigcup X$

proprio perché $k \notin \bigcup X$.

- $\forall\, x \in X \quad x \subseteq \bigcup X$. ($\bigcup X$ è un maggiorante)

- Sia Y un maggiorante di X, allora

$\forall\, x \in X \quad x \subseteq Y$, quindi $\bigcup X \subseteq Y$. ∎

Cor: $|\mathbb{R}| > \aleph_0$

D.: $|\mathbb{R}| \geq \aleph_0$ perché $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$.

ci manca $|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$. Se così non fosse $(\mathbb{R}, <)$ sarebbe un ordine totale

- denso (perché ha un sottoins. denso)
- senza estremi (facile verifica)
- numerabile (ipotesi assurda)

$\longrightarrow$ Cantor $(\mathbb{R}, <) \not\simeq (\mathbb{Q}, <)$

Però $\mathbb{R}$ è completo e $\mathbb{Q}$ no. $\not\simeq$ ☒

Prop: Sia $(X, <)$ un ordine completo senza estremi che ha un sottoinsieme denso e numerabile. Allora $(X, <) \simeq (\mathbb{R}, <)$.

Dim. Sia $Y \subseteq X$ denso in X e numerabile. Allora Y (con l'ordinamento indotto) è denso e senza estremi, quindi $\exists f: \mathbb{Q} \to Y$ iso di ordini. f ci dà una biezione fra i s.i di $\mathbb{Q}$ e i s.i di Y $f^*: A \longmapsto f[A]$.

Quindi $f^*[R] \longrightarrow$ sezioni di Y

in maniera crescente.

Di conseguenza basta vedere che

$$(X, <) \simeq (\text{sezioni su } Y, \subsetneq)$$
$$x \longmapsto \{y \in Y \mid y < x\}$$

Verifica esercizio. ☒