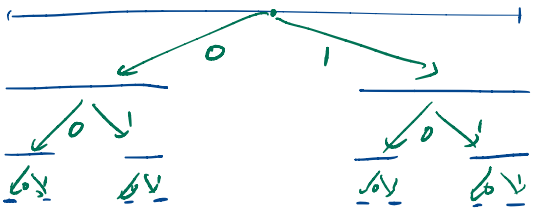
Fatto $|\mathbb{R}| > \aleph_0$

Con (esempio) Esistono numeri reali trascendenti.

Teo $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$

Dim Idea:



$\cap$

$\mathbb{R} \supseteq C = \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

Successioni in 2^{ω} → rami dell'albero → punti di C

$$2^{\aleph_0} \leq |C| \leq |\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = 2^{|\mathbb{Q}|} = 2^{\aleph_0}$$

Dettagli Ci basta dimostrare che $|2^{\omega}| \leq |\mathbb{R}|$.

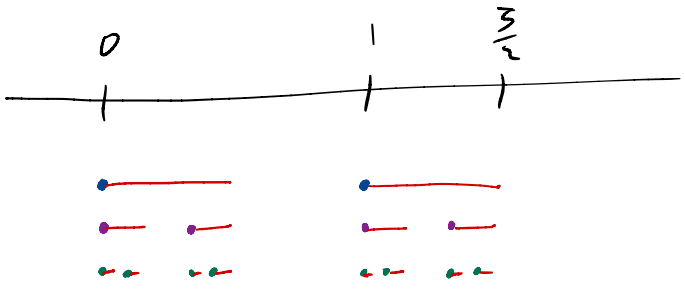
Definiamo una funzione iniettiva

$$f : 2^{\omega} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a_i)_{i \in \omega} \longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

$(a_i)_{i \in \omega} \in \{0,1\}$

"C è l'insieme dei numeri che, in base 3 si scrivono $a_0, a_1, a_2, a_3 \dots$ usando solo 0 e 1 come cifre — ossia senza usare il 2"



Per $\square_i \in \mathbb{R}$ $\square_i \geq 0$ definiamo per ricorsione

$$\sum_{i=0}^{0} \square_i = \square_0 \qquad \sum_{i=0}^{n+1} \square_i = \left(\sum_{i=0}^{n} \square_i \right) + \square_{n+1}$$

e $$\sum_{i=0}^{\infty} \square_i = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n} \square_i \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Verifichi.

- f è ben definita, ossia $\sup\{\dots\}$ esiste.

  ossia $\left\{ \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{3^i} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ è superiormente limitato.

Per ind. $$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{3^i} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} \leq \frac{3}{2}$$

passo induttivo $\sum_{i=0}^{n+1} \frac{a_i}{3^i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{3^i} + \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}$ ($a_{n+1} \in \{0,1\}$)

$$\leq \underbrace{\frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}}_{i=0} + \underbrace{\frac{1}{3^{n+1}}}_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{3^{n+1}} \left(\frac{3}{2} - 1 \right)$$

- f è iniettiva. $(a_i)_{i\in\omega}, (b_i)_{i\in\omega} \in 2^\omega$

Sia i_0 il minimo t.c. $a_{i_0} \neq b_{i_0}$. Assumiamo $a_{i_0} = 0$ e $b_{i_0} = 1$.

$$\boxed{f(b) \geq f(a) + \frac{1}{2\cdot 3^{i_0}}}$$

$$\frac{1}{3^{i_0+1}} \cdot \sum_{i=0}^{n-i_0-1} \frac{a_{i_0+1+i}}{3^i}$$

$$f(a) = \sup_n \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{3^i} = \sup_n \sum_{i<i_0} \frac{a_i}{3_i} + \sum_{i=i_0+1}^{n} \frac{a_i}{3_i}$$

$$\sum_{i=i_0}^{n} \frac{a_i}{3^i} = \sum_{i=i_0+1}^{n} \frac{a_i}{3^i} + \frac{a_{i_0}}{3^{i_0}} = \sum_{i=i_0+1}^{n} \frac{a_i}{3^i}$$

$a_{i_0} = 0$ per ipotesi

$$\sum_{i<i_0} \frac{b_i}{3^i} \leq \frac{1}{2\cdot 3^{i_0}}$$

$$f(a) \leq \sum_{i<i_0} \frac{b_i}{3^i} + \frac{1}{2\cdot 3^{i_0}} \leq f(b) - \frac{1}{3^{i_0}} + \frac{1}{2\cdot 3^{i_0}}$$

b_{i_0}

$$f(b) \geq \sum_{i=0}^{i_0} \frac{b_i}{3^i} = \sum_{i<i_0} \frac{b_i}{3^i} + \frac{1}{3^{i_0}} = f(b) - \frac{1}{2\cdot 3^{i_0}}$$

Cardinalità fino ad ora:

$0, 1, 2, \ldots$ $\quad \aleph_0 \quad \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \quad 2^{2^{\aleph_0}} \ldots$

finiti — NIENTE IN MEZZO — ? — ?

Lem $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

Dim $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Conseguenza Siano α, β "finito" o $\aleph_0$ o $2^{\aleph_0}$

$$\alpha + \beta = \alpha \cdot \beta = \max(\alpha, \beta)$$

eccetto $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \beta = 0$!

Esercizio (facile) fare le verifiche

$$2^{\aleph_0} \leq \aleph_0 + 2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot 2 \leq$$

$$\leq 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Conseguenza α "finito" o $\aleph_0$ o $2^{\aleph_0}$

$$\alpha^{\text{finito}} = \begin{cases} 1 & \text{finito} = 0 \\ \alpha & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\alpha^{\aleph_0} = \begin{cases} \alpha & \text{se } \alpha \leq 1 \\ 2^{\aleph_0} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$2^{\aleph_0} \leq \alpha^{\aleph_0} \leq \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Oss $|A| = \aleph_0$ e $B \subseteq A$ e $|B| < \aleph_0$

allora $|A \setminus B| = \aleph_0$

Dim $A = \underbrace{B}_{\text{finito}} \cup \underbrace{(A \setminus B)}_{\to \text{infinito}}$

$\to$ un sottoins. infinito di un num. è num. ∎

Lem $|A| = 2^{\aleph_0}$ e $B \subseteq A$ e $|B| \leq \aleph_0$

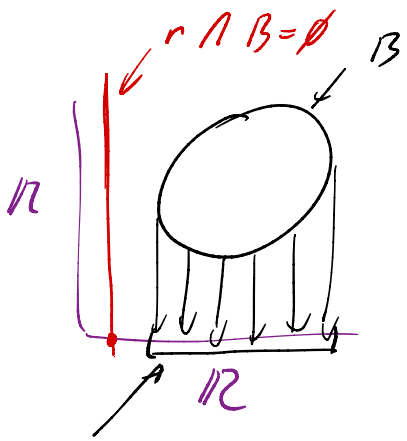
allora $|A \setminus B| = 2^{\aleph_0}$

Dim Ipro: $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0}$

$|A| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$

$r \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus B$

$2^{\aleph_0} = |r| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus B|$



$|\pi(B)| \leq \aleph_0$

Dr Hegli

Siccome $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, esiste $f: A \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ biunivoca.

$f|_B$ è una biezione fra B e $f[B]$

$f|_{A \setminus B}$ è una biezione fra $A \setminus B$ e $f[A \setminus B] = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus f[B]$

Sappiamo quindi che $|f[B]| \leq \aleph_0$ e dobbiamo dimostrare che $|\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus f[B]| = 2^{\aleph_0}$.

Chiaramente $|\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus f[B]| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$, di conseguenza basta vedere che $|\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus f[B]| \geq 2^{\aleph_0}$, ci basta quindi

trovare una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus f[B]$ iniettiva.

Sia $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proiezione sulla prima componente.

Siccome $|f[B]| \leq \aleph_0$, abbiamo $|\pi_1[f[B]]| \leq \aleph_0$, quindi esiste $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \pi_1[f[B]]$. (altrimenti avremmo $\mathbb{R} \subseteq \pi_1[f[B]]$, quindi $|\mathbb{R}| \leq \aleph_0$, contraddicendo $|\mathbb{R}| > \aleph_0$) Definiamo:

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus f[B]$$
$$y \longmapsto (x_0, y)$$

g è la funzione richiesta. ∎

Nota

sappiamo che $|A| \leq \aleph_0 \to |f[A]| \leq \aleph_0$

NON sappiamo che $|A| \leq 2^{\aleph_0} \to |f[A]| \leq 2^{\aleph_0}$

Per ora!

Determina la cardinalità di:

- insieme dei reali irrazionali
  trascendenti
- insieme dei sottoinsiemi infiniti di ω
  finiti di $\mathbb{R}$
  infiniti di $\mathbb{R}$
- insieme delle succ. di naturali
  crescenti di naturali
  di reali
  crescenti di reali
  definitivamente costanti di nat.
  periodiche di naturali
- insieme delle $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  —— continue *
  —— crescenti *

Def A è una partizione di B se
$B = \bigcup A$, $\emptyset \notin A$ e $\forall x,y \in A \; x \cap y = \emptyset$

- insieme delle partizioni di ω
  finita ($|A| < \aleph_0$) di ω
  in parti finita
  in parti infinita

- ins. dei sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}$.

Delle seguenti dire a quali potete rispondere e a quali no **

Puoi assumere che, con gli assiomi visti finora, non si può determinare se $|\text{sottoins. numerabili di } \mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ o no.

- ins. dei sottoinsiemi di $\mathbb{R} \sim (\omega, <)$ con l'ordinamento indotto da $\mathbb{R}$
- ——— $\sim (\mathbb{Q}, <)$ ———
- ——— bene ordinati ———