$x_1 = 0.1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\ldots$

$x_2 = 0.1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots$

$x_3 = 0.0\,0\,7\,0\,0\,0\,0\,0\ldots$

$\hookrightarrow$ $0.\underline{110}\,\underline{201}\,\underline{317}\ldots$

$|\text{successioni crescenti di naturali}| \leq 2^{\aleph_0}$

$|\text{succ. di naturali}| = |\omega^\omega| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

$2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

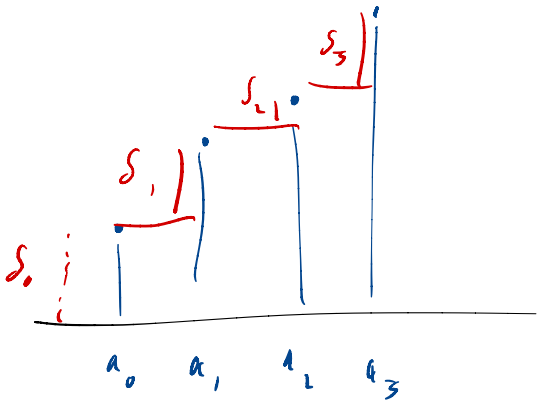
$2 \leq \aleph_0 \leq 2^{\aleph_0}$

$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$?

scelta per a_3 sono $|\{n > a_2\}| = \aleph_0$

$\underbrace{\aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \ldots}_{\omega \text{ scelte}} = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

(a_0 a_1 a_2 a_3 $\ldots$)



incroissante $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}} \longrightarrow (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$

$a_0 = \delta_0 \qquad a_1 = a_0 + \delta_1 + 1 \qquad a_2 = a_1 + \delta_2 + 1$

$$(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}} \longmapsto \left(i + \sum_{n=0}^{i} \delta_n\right)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

$\delta_0 = a_0 \qquad \delta_{i+1} = a_{i+1} - a_i - 1.$

$\{x \in \mathbb{R} \quad x > 1\} \longmapsto a_i = \lfloor x \cdot i \rfloor$

$$x = \lim_{i\to+\infty} \frac{\lfloor x \cdot i \rfloor}{i}$$

$$|\text{funzioni } \mathbb{R}\to\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = \left(2^{\aleph_0}\right)^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}$$

$$2^{a} > a$$

- $|\text{funzioni continue } \mathbb{R}\to\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$

osservazione chiave: Se $f \in C_0$ ← f. cont $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ allora f è determinata da $f|_{\mathbb{Q}}$.

$f(x)$? sia $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una succ. di razionali $\to x$

allora, per continuità $f(r_i) \to f(x)$.

Assumendo che $f, g \in C_0 \wedge f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}} \to f = g$ *

dimostriamo $|C_0| = 2^{\aleph_0}$.

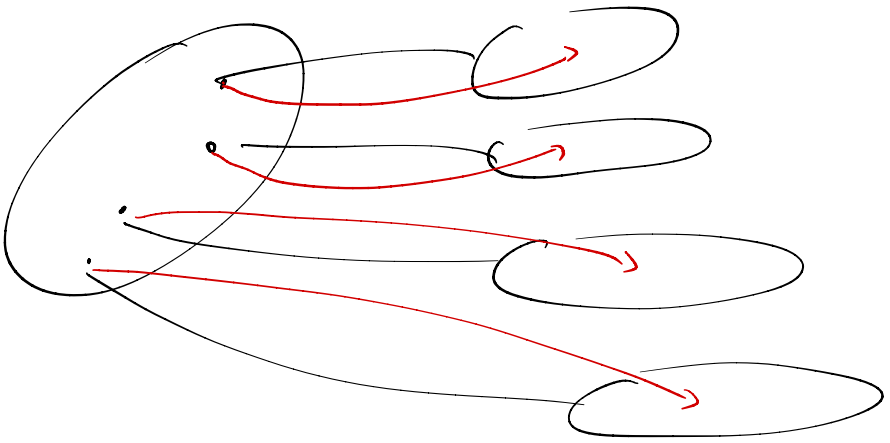
$C_0 \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ | è iniettiva
$f \longmapsto f|_{\mathbb{Q}}$ | $\to |C_0| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

* Dim. per assurdo assumo $f \neq g$, senza perdita di generalità $f(x_0) < g(x_0)$.

$\to \exists\,]a,b[\ni x_0 \quad \forall x \in]a,b[\; f(x) < g(x)$

$\to$ per densità $\exists\, r \in \mathbb{Q} \cap]a,b[$

$\to f(r) < g(r) \to f|_{\mathbb{Q}} \neq g|_{\mathbb{Q}}$



$|x| \leq |y| \wedge |y| \leq |x|$

Es. Dim. che in $\mathbb{Q}$ $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ non ha un sup.

Es2. $x \in \mathbb{Q}$ $x^2 \neq 2$.

Scopo: $\nexists s \in \mathbb{Q}$ "s è il sup di $\{x^2 < 2\}$"

$\forall s \in \mathbb{Q}$ "s non è il sup di $_$"

$\forall s \in \mathbb{Q}$ se s è un maggiorante

$\exists s' \in \mathbb{Q}$ $s' < s$ ed è un maggiorante

$s = \sqrt{2} + \delta$ $\quad s^2 = 2 + 2\sqrt{2}\delta + \delta^2$

$2 + 2s\delta - \delta^2$

$\delta = \dfrac{s^2 - 2 + \delta^2}{2s}$ $\quad \sqrt{2} = s - \dfrac{s^2 - 2 + \delta^2}{2s} \leq s - \underbrace{\dfrac{s^2 - 2}{2s}}_{s'} < s$

$\lightning$

Sia s un maggiorante di $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ mi basta dimostrare che $s' = s - \frac{s^2-2}{2s} < s$ è un maggiorante.

Osserviamo che $0 < \overbrace{\frac{s^2+2}{2s} = s - \frac{s^2-2}{2s}}^{s'} < s$. Inoltre

$$(s')^2 = s^2 - 2s\frac{s^2-2}{2s} + \left(\frac{s^2-2}{2s}\right)^2 = 2 + \left(\frac{s^2-2}{2s}\right) > 2$$

Quindi $t \geq s' \to t^2 = \overbrace{(t-s')^2}^{\geq 0} + 2\cdot\overbrace{(t-s')}^{\geq 0}\cdot s' + \overbrace{(s')^2}^{>2} > 2$

$$t \geq s' \to t \notin A$$

Di conseguenza s' è un maggiorante di A minore di s, come desiderato ∎

Def. $(F, 0, 1, +, \cdot, <)$ è un campo ordinato se

- $(F, 0, 1, +, \cdot)$ è un campo
- $(F, <)$ è un ordine totale

Inoltre $\forall x, y, z \in F \quad x < y \to x + z < y + z$

$\forall x, y \in F \quad (0 < x \wedge 0 < y) \to 0 < x \cdot y$

Def ($+$ su $\mathbb{R}$) Siano $a, b \in \mathbb{R}$

$$a + b = \{ r_1 + r_2 \mid r_1 \in a \wedge r_2 \in b \}$$

Def ($-$ su $\mathbb{R}$) $b + (a - b) = a$

Def ($\cdot$ su $\mathbb{R}$) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ $a, b > 0$

$$a \cdot b = \{ r \in \mathbb{Q} \mid r < 0 \} \cup \{ r_1 \cdot r_2 \mid r_1 \in a \wedge r_2 \in b \wedge r_1, r_2 > 0 \}$$

$gr(0)$ $gr(1)$

Prop $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ è un campo ordinato

Prop. Sia $(F, \dots)$ un campo ordinato completo, allora $(F, \dots)$ e $(\mathbb{R}, \dots)$ sono isomorfi (ossia $\exists$ biiezione che è sia un iso di campi sia di ordini).

Dimostrazioni: Libro di testo CAPITOLO 10

nota prof. Di Nasso FASCICOLO 4