**Def** $(F, 0, 1, +, \cdot, <)$ è un campo ordinato se

- $(F, 0, 1, +, \cdot)$ è un campo
- $(F, <)$ è un ordine totale
- $\forall x,y,z \in F \quad x<y \to x+z<y+z$
- $\forall x,y \in F \quad (0<x \wedge 0<y) \to 0<x\cdot y$

**Prop** $(F, 0, 1, +, \cdot, <)$ campo ordinato completo $\Rightarrow (F, <) \sim (\mathbb{R}, <)$

**Dim** Basta dimostrare che $F$ non ha estremi ed esiste $A \subseteq F$ denso e numerabile. A questo scopo troviamo $\mathbb{Q} \hookrightarrow F$.

**Osservazioni preliminari** (in $F$)

- $0<1$ *dim.* $1<0 \to 0 = 1+(-1) < 0+(-1) = -1 \to 0<(-1)\cdot(-1) = 1$ ✓
- $a<b \wedge 0<c \to ac<bc$ *dim.* $a<b \to 0<b-a \to 0<(b-a)\cdot c \to ac<bc$
- $a<b \wedge c<0 \to bc<ac$ *dim.* esercizio $(c<0 \leftrightarrow 0<-c)$
- $0<x \to 0<\frac{1}{x}$ *dim.* $\frac{1}{x}<0 \to 1 = \frac{1}{x}\cdot x < 0\cdot x = 0$ ✓

① $\mathbb{N} \hookrightarrow F$ con un iso di ordini

Sia $f: \mathbb{N} \to F \quad f(0)=0 \quad f(n+1) = f(n)+1$

Allora $a<b \to f(a)<f(b)$

*Dim* induzione su $b$.

caso $b=0$ vuoto

caso $b+1$ $a<b+1$

↳ o $a<b$ $\to f(a)<f(b) < f(b)+1 = f(b+1)$

o $a=b$ analogo.

② $\mathbb{Z} \hookrightarrow F$ con un iso di ordini

$(a,b) \mapsto b-a$

$\mathbb{Q} \hookrightarrow F$ con un iso di ordini

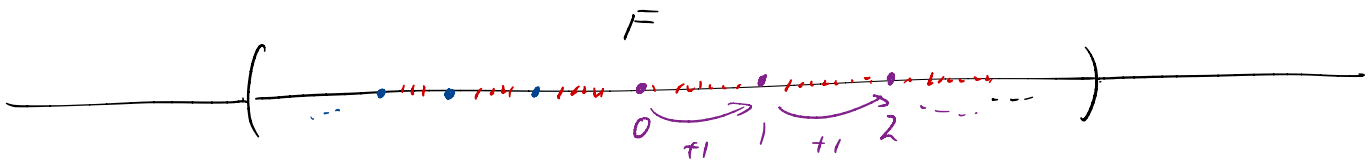
$(a,b) = a\cdot\frac{1}{b}$

Verifiche: esercizio

Notazionalmente, identifichiamo $\mathbb{Q}$ con la sua immagine in $F$.

"$\mathbb{Z} < x$" vuol dire "l'immagine di $\mathbb{Z}$ secondo l'immersione $\mathbb{Q} \hookrightarrow F$ è minore di $x$"

Siamo quindi in questa situazione:



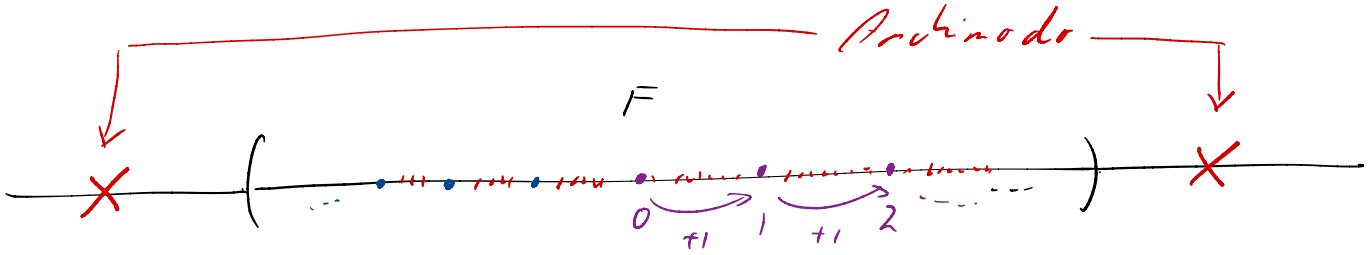

$\mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q}$

③ Principio di Archimede

$\forall x \in F \, (0 < x \rightarrow) \, \exists n \in \mathbb{N} \quad x < n$

"F non ha elementi infiniti"

In altri termini, vogliamo escludere che ci siano elementi di $F$ in questa semiretta:




$\mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q}$

Dim.

Sia $S = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq x\}$

- $S \subsetneq \mathbb{N}$

  Dim Per assurdo, se $S = \mathbb{N}$, allora $\mathbb{N}$ è sup lim. da $x$

  Sia $k = \sup \mathbb{N}$. Allora $k-1 < k$ non è un maggiorante di $\mathbb{N}$, quindi $\exists m \in \mathbb{N} \; k-1 < m$. Ma allora $k < m+1$ ↯

- $S$ è un segmento iniziale proprio di $\mathbb{N}$

  Dim $a \in S \to a \leq x \to \forall b \leq a \; b \leq x \to \forall b \leq a \; b \in S$

- $S$ è sup. lim. in $\mathbb{N}$

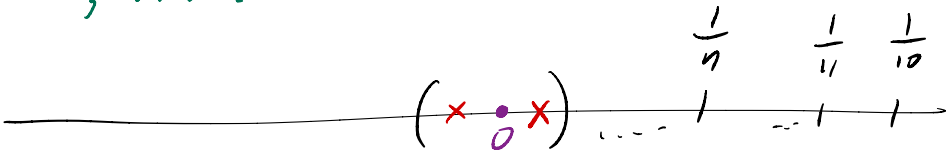
  Dim Se no $\forall a \in \mathbb{N} \; \exists b \in S \; a \leq b$. Ma siccome $S$ è un segmento iniziale $\exists b \in S \; a \leq b \to a \in S$. Allora $\forall a \in \mathbb{N} \; a \in S$ ↯

- Esiste $n = 1 + \max S$. Dimostriamo che $x < n$.

  Dim per assurdo $n \leq x \to n \in S$ ma $n > \max S$ ↯

④ $\forall x \in F \quad x > 0 \to \exists n \in \mathbb{N} \; 0 < \frac{1}{n} < x$ "F non ha elementi infinitesimi"

Ossia vogliamo escludere attorno che ci siano elementi di $F$ più vicini a $0$ di qualunque numero razionale




Dim $0 < \frac{1}{x}$. Sia $\frac{1}{x} < n$ per il Principio di Archimede.

Siccome $\frac{x}{n} = x \cdot \frac{1}{n} > 0$ abbiamo $\frac{1}{n} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{n} < n \cdot \frac{x}{n} = x$.

(5) $\mathbb{Q}$ è denso in $F$

D.: Basta dimostrare che dati $x, y \in F$ con $0 < x < y$, allora esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.

(Consideriamo infatti il caso generale $x < y$

- Se $x = 0$ concludiamo per (4)
- Se $x < 0$ e $0 < y \to x < q = 0 < y$

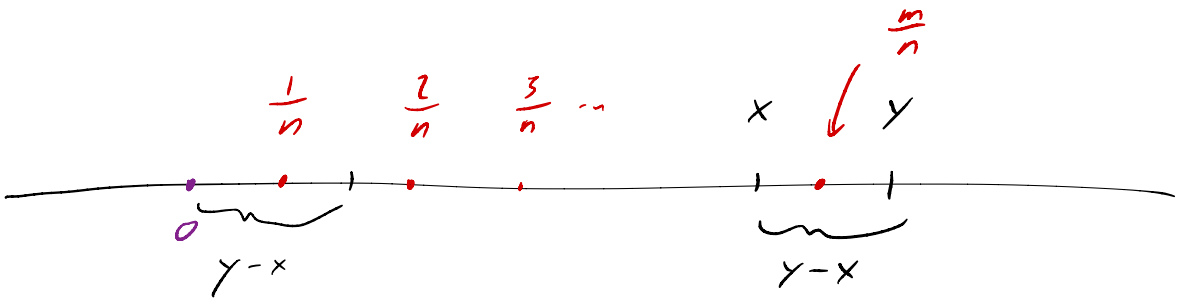



e $y \leq 0 \to$ Allora $0 \leq -y < -x$

$x < y \leq 0$ → Troviamo $0 \leq -y < q < -x$

Quindi $x < -q < y$. )

Sia $0 < \frac{1}{n} < y - x$.




Per il principio di Archimede $S = \{a \in \mathbb{N} \mid nx < a\}$ è non vuoto, sia quindi $m = \min S$. Sia $q = \frac{m}{n}$.

- $x < q$ dim $nx < m \longrightarrow x = nx \cdot \frac{1}{n} < m \cdot \frac{1}{n} = q$
- $q < y$ dim supponiamo per assurdo $y \leq q$

$$y \leq \frac{m}{n} \to x = y - (y - x) < y - \frac{1}{n} \leq \frac{m-1}{n}$$

$$\to nx < m - 1 \quad \text{↯}$$

(6) $F$ non ha estremi: dim $x = \max F \to x + 1 \leq x$ ↯ ∎

# Problemi nella "nostra" teoria degli insiemi

## Guaio 1

$$S = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$$

Esercizio (interessante) esibire una formula insiemistica $\varphi(x)$ tale che $S = \{x \mid \varphi(x)\}$

Esercizio (ostico) dimostrare che non possiamo dimostrare che $S$ esiste.

$$T = \{w, \mathcal{P}(w), \mathcal{P}(\mathcal{P}(w)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(w))), \dots\}$$

Idra (sbagliata!)

$f(0) = \emptyset \qquad f(n+1) = \{f(n)\} \qquad S = Im(f)$ ☺

$? \longrightarrow ?$

$x \longmapsto \{x\}$

$$S = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$ Mediante una formula insiemistica

$w = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

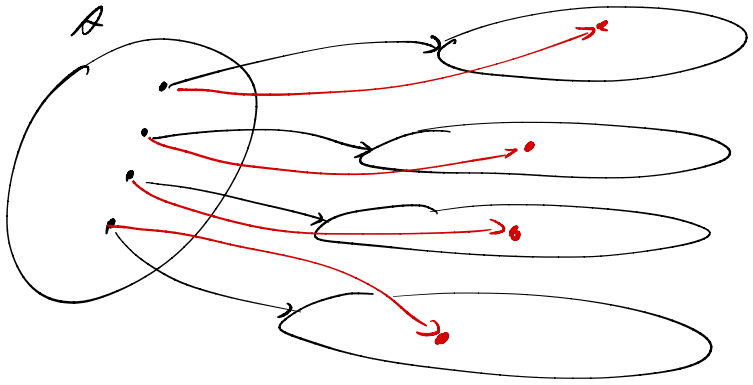
$\varphi(x,y) \qquad \forall x \in w \; \exists! y \; \varphi(x,y)$

$\equiv$

→ RIMPIAZZAMENTO

# Ciclo 2

Immaginiamo di avere una famiglia di insiemi non vuoti $f : A \to B \quad \forall a \in A \quad f(a) \neq \emptyset$




↪ FUNZIONE DI SCELTA (sarebbe bello che esistesse!)

Conseguenze

DESIDERABILI

- Ogni spazio vettoriale ha una base
- Ogni ideale è contenuto in un ideale massimale
- Teo di Hahn-Banach

FORSE INDIFFERENTI

- $\forall X, Y \quad |X| \leq |Y| \vee |Y| \leq |X|$
- Ogni insieme è bene ordinabile
- $\forall X$ infinito $|X| = |X^2|$

FORSE FASTIDIOSE

- esistono insiemi non Lebesgue-misurabili
  funzioni non integrabili
- esistono giochi non determinanti

$S \subseteq \mathbb{R}$

A B giocatori

$0,237001\ldots$ → $\in S$ vince A

→ $\notin S$ vince B

Nessuno dei due giocatori, in generale, ha una strategia vincente.

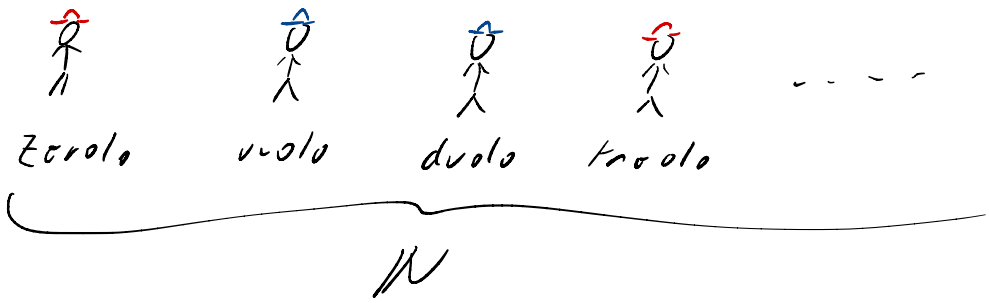
PROPRIO PAZZESCHE

- Banach-Tarski $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,y) \in r\}$

È possibile dividere $B_1(0)$ in un numero finito di pezzi (5). Muoverli rigidamente e ottenere $B_1(0)$ v $B_1(2,0,0)$.

Es (difficile) Assumendo B-T. Dimostrare che si può scomporre un cubo di lato 1 in un numero fin. di pezzi e ricomporlo rigidamente in un cubo di lato 2.

• La faccenda dei nani.



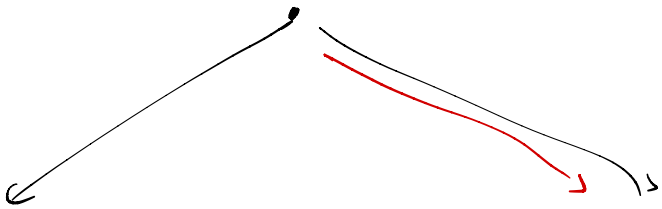

$\Rightarrow$ indovinano tutti eccetto una quantità finita.

---

## Programma per le prossime lezioni

NERO: disposizione delle truppe nemiche

ROSSO: il nostro piano di battaglia



ASSIOMA DELLA SCELTA
E ENUNCIATI EQUIVALENTI

ASSIOMA DEL RIMPIAZZ.
(APPLICAZIONE: ORDINALI)

FACILITA
(MA NON È NECESSARIO)