Def $(S, <)$ è b.o. se

- $(S, <)$ è un ordine totale
- ogni $X \subseteq S$ $X \neq \emptyset$ ha un minimo.

Scopo: dimostrare che se $(A, <)$ e $(B, <)$ sono b.o.

allora
- $(A, <) \simeq (B, <)$
- $(A, <) \simeq$ un s.i. proprio di $(B, <)$
- $(B, <) \simeq$ ——— $(A, <)$

→ la relazione "essere $\simeq$ a un s.i. proprio di"
è un ordine totale (buono) sui buoni ordinamenti
a meno di isomorfismo.

Def Sia $(S, <)$ un ordine totale, $a \in S$

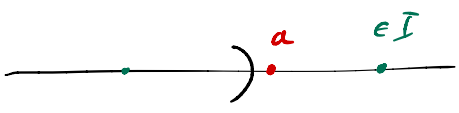
Il s.i. principale determinato da a è

$$S_a \overset{\text{def.}}{=} \{x \in S \mid x < a\}$$

Prop. Se $(S, <)$ è un b.o. ogni s.i. proprio è principale.

Dim. Sia: I un s.i. proprio di S.

$a = \min(S \setminus I)$.



verifichiamo che $I = S_a$

- sia $x \in S_a \to x < a \to x \in I$
- sia $x \in I$ per assurdo supponiamo $x \geq a$
  allora $a \in I$ poiché I è un s.i. $\rightsquigarrow$
  $x \in I \to x < a \to x \in S_a$

Es: vale il "viceversa"

Se ogni s.i. proprio di $(A, <)$ (ordine totale) è principale allora $(A, <)$ è un b.o.

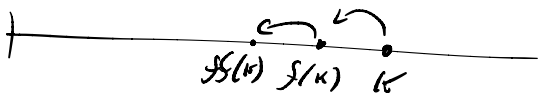
$x < y \to f(x) < f(y)$

Lem. Sia $(A, <)$ b.o. $f : A \to A$ crescente allora $\forall x \in A \quad f(x) \geq x$

Dim Per assurdo, sia k min. t.c. $f(k) < k$.

$f(k) < k \longrightarrow f(f(k)) < f(k) < k$

contro la minimalità di k $\rightsquigarrow$ ⚠



Corollari

1. Un b.o. non può essere $\sim$ a un suo s.i. proprio.
2. $\exists!$ isomorfismo fra un b.o. e se stesso (l'identità)
3. $(A, <) \sim (B, <)$ b.o. allora $\exists!\ f : A \to B$ iso.

(1) Per assurdo $(A, <) \sim A_x$ quindi esiste

$f : A \to A_x$ isomorfismo di ordini

$\to$ crescente

$\to f(x) \geq x$

$A_x \to < x$ ↯

(2) Per assurdo sia $f : A \to A$ diversa dall'id.

Sia x minimo tale che $f(x) \neq x$, allora o

- $f(x) < x$ ↯ (perché f è crescente)
- $f(x) > x$ ↯ (perché f^{-1} è crescente)

(3) Facile conseguenza di (2).

$f : A \to B$

$g : A \to B$ iso

allora $g^{-1} \circ f$ è iso $A \to A$, $g^{-1} \circ f = Id$. ∎

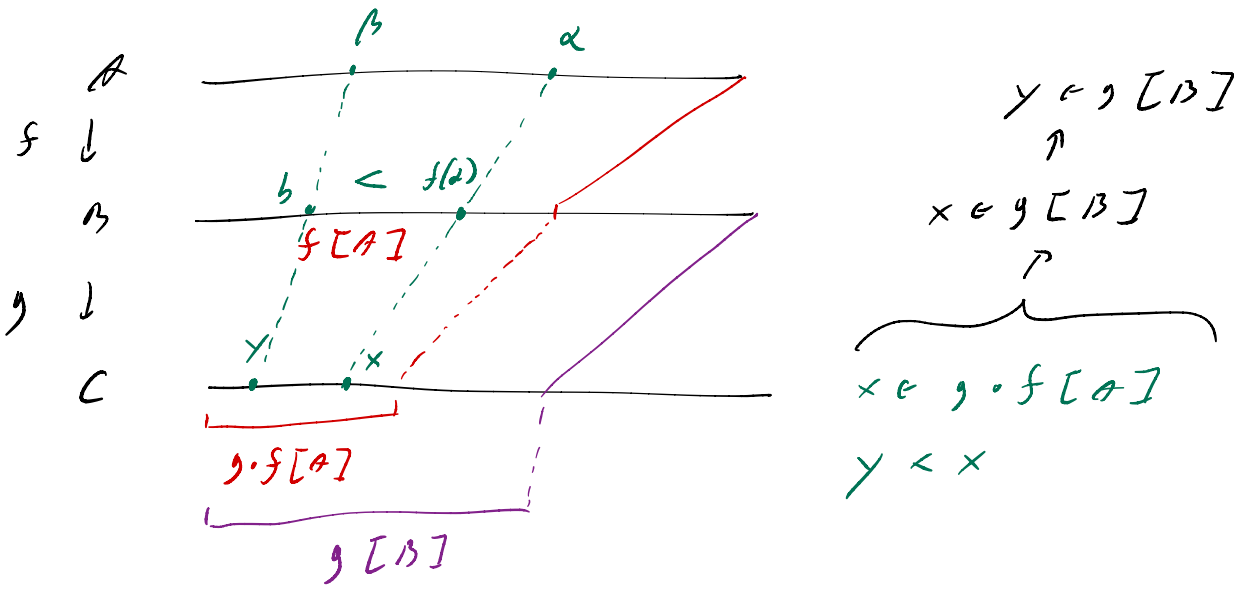
(05) "La relazione $\sqsubset$ è $\sim$ a un s.i. di Δ è transitiva"

Siano $(A, <)$, $(B, <)$, $(C, <)$ t.c.

$(A, <)$ iso a un s.i. di $(B, <)$

$(B, <)$ iso a un s.i. di $(C, <)$

$\to (A, <)$ è iso a un s.i. di $(C, <)$



Oss. "La relazione $\sim$ s.i. è antisimmetrica a meno di isomorfismi"

Siano $(A, <)$, $(B, <)$ b.o.

- $(A, <) \sim$ a un s.i. di $(B, <)$
- $(B, <) \sim$ a un s.i. di $(A, <)$

$\rightarrow (A, <) \sim (B, <)$.

Dim. $f : A \to B$ iso da A a un s.i. di B

$g : B \to A$ —— B —— A

$g \circ f : A \to A$ iso da A —— A

↳ $g \circ f = Id$. quindi $g = f^{-1}$ ∎

Notazione

$(A,<) \preceq (B,<)$ $\overset{\text{def.}}{\equiv}$ $(A,<)$ è $\sim$ a un s.i. di $(B,<)$

$(A,<) \prec (B,<)$ $\overset{\text{def.}}{\equiv}$ ——— proprio ———

Oss.

$(A,<) \prec (B,<) \leftrightarrow (A,<) \preceq (B,<) \wedge \neg (A,<) \sim (B,<)$

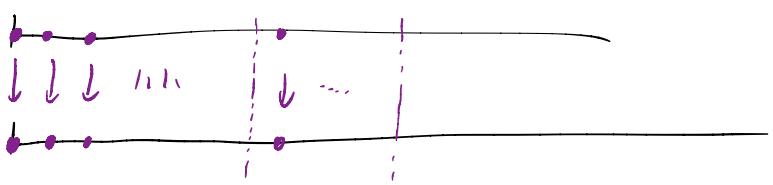
$(A,<) \preceq (B,<) \wedge (B,<) \preceq (A,<) \rightarrow (A,<) \sim (B,<)$

Teo "I b.o. sono totalmente ordinati da $\prec$ a meno di isomorfismi"

Siano $(A,<)$ e $(B,<)$ b.o. allora vale esattamente una delle seguenti:

1. $(A,<) \prec (B,<)$
2. $(A,<) \sim (B,<)$
3. $(B,<) \prec (A,<)$

D.:-



$$f = \{(a,b) \in A \times B \mid A_a \sim B_b\}$$

$$f = \{ (a,b) \in A \times B \mid A_a \sim B_b \}$$

Dimostriamo che

f è
(1.1) una funzione
(1.2) ... iniettiva
(2) ... crescente strettamente
(3) $Dom(f)$ è un s.i. di A
(4) $Im(f)$ è un s.i. di B
(5) $Dom(f) = A \vee Im(f) = B$

(1.1) $(a,b) \in f \wedge (a,b') \in f \rightarrow b = b'$

$A_a \sim B_b$ $\quad$ $A_a \sim B_{b'}$

$B_b \sim B_{b'}$ $\quad$ Per assurdo poniamo $b < b' \rightarrow b \in B_{b'}$

$\rightarrow B_b \prec B_{b'}$

(1.2) $f(a) = b$ $\quad$ $f(a') = b$

$(a,b) \in f \wedge (a',b) \in f \rightarrow a = a'$

$A_a \sim B_b$ $\quad$ $A_{a'} \sim B_b$

$A_a \sim A_{a'}$ $\quad$ come nel caso precedente.

(2) f è crescente

Per assurdo siano $x, y \in Dom(f)$ $\underbrace{x < y}_{1}$ $\underbrace{f(y) \leq f(x)}_{2}$

$\underbrace{A_x \prec A_y \sim B_{f(y)}}_{1} \preceq \underbrace{B_{f(x)} \sim A_x}_{2}$

$A_x \sim J \prec A_y$

③ $Dom(f)$ è un s.i. di A

$x \in Dom(f) \wedge y < x \rightarrow y \in Dom(f)$

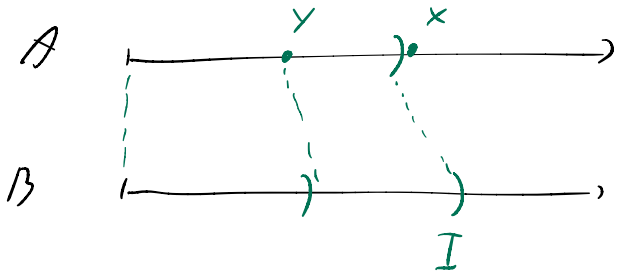
$\downarrow$

A_x è iso a un s.i proprio I di B. con $g: A_x \to I$

$(A_x)_y$ è iso a $I_{g(y)}$

$\parallel$

A_y è iso a un s.i. proprio di B



$y < x$ voglio dimostrare $A_y \prec B$ sapendo $A_x \prec B$

$A_y \prec A_x \prec B \rightarrow A_y \prec B$.

④ $Im(f)$ è s.i. di B. (uguale a ③).

⑤ $Dom(f) = A \vee Im(f) = B$.

Per assurdo $Dom(f) = A_x$ e $Im(f) = B_y$

Per ① ... ④ f è un isomorfismo fra A_x e B_y

Per la definizione di f, allora $(x, y) \in f$. ↝

Esercizio Sia $(A, <)$ b.o. e $B \subsetneq A$. Dimostrare che $B \preceq A$ ma non necessariamente $B \prec A$.

Esercizio Sia $(A, <)$ un ordine totale con $A = \bigcup S$. Supponiamo che ① ogni $X \in S$ è b.o. dall'ordinamento di A

② $\forall X, Y \in S$ o X è s.i di Y o Y è s.i di X

Allora $(A, <)$ è un b.o. — Pare controes. se non vale ②.