DEF. ESTENSIONALE

$c = a^b \iff |c| = |\{f : b \to a\}|$

DEF. INTENSIONALE

$a^0 = 1 \qquad a^{b+1} = a^b \cdot a$

FINITO — COINCIDONO

INFINITO

ARITMETICA CARDINALE $\neq$ ARITMETICA ORDINALE

ESTENSIONALE = INTENSIONALE

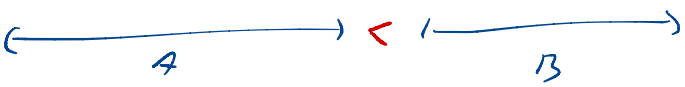
ARGOMENTO DI ASPESSO

RICORSIONE TRANSFINITA

Scopo: definire $+, \cdot, \square^{\square}$ fra buoni ordinamenti.

Siano $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ buoni ordini.

① $+$ $A + B$

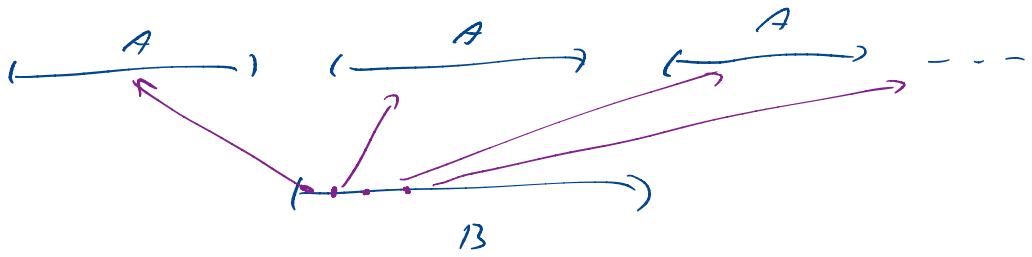


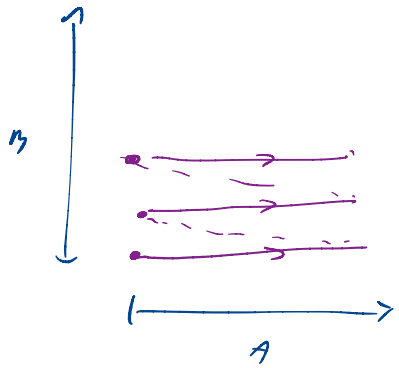
$A + B = (A \sqcup B, <_+)$

$x <_+ y$ se

- $x, y \in A$ $x < y$
- $x, y \in B$ $x < y$
- $x \in A$ e $y \in B$

(?) $A \cdot B$ "A ripetuto B volte"





$$A \cdot B = (A \times B, <_x)$$

$(x,y) <_x (x',y')$ se $y <_B y'$

o $y = y'$ e $x <_A x'$

Def Data $f : A \to B$ il **supporto** di f è

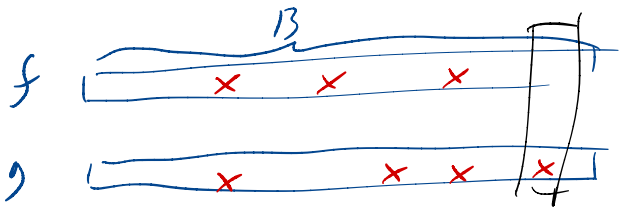
$$supp(f) = \{x \in A \mid f(x) \neq_B min(B)\}$$

Def

$$A^B = (\{f : B \to A \mid |supp\, f| < \aleph_0\}, <_{lex})$$

A^2 $A \times A$

A^3 $(A \times A) \times A$



$f <_{lex} g$ se $f(x) < g(x)$ con x massimo tale che $f(x) \neq g(x)$

Esercizio Verificare che $A+B$, $A\times B$, A^B sono b.o., e che inoltre valgono le seguenti proprietà

$(A+B)+C \sim A+(B+C)$ $\qquad A\times(B\times C)\sim(A\times B)\times C$

$A\times(B+C)\sim A\times B + A\times C$ $\qquad A^{B+C}\sim A^B\times A^C$ $\qquad (A^B)^C\sim A^{B\times C}$

Esercizio ESIBIRE CONTROESEMPI ALLE SEGUENTI

$A+B\sim B+A$ $\qquad A\times B\sim B\times A$ $\qquad (A+B)\times C\sim A\times C+B\times C$ $\qquad (A\times B)^C\sim A^C\times B^C$

$\omega + 1 = \bullet<\bullet<\bullet \cdots\cdots <\bullet$

$1 + \omega = \bullet<\bullet<\bullet<\bullet\cdots\cdots \sim \omega$

Def α è un ordinale se α è transitivo* e α è b.o. da $\in$ (come ordine stretto).

$(\alpha, <_\in)$ è un b.o. con $<_\in = \{(x,y)\in\alpha\times\alpha \mid x\in y\}$

***Def.** α è transitivo se $\forall x\in\alpha \quad x\subseteq\alpha$

OPS. Qui c'era un esercizio che non si può fare senza l'assioma del rimpiazzamento. Vedi lezione 20.

Esempio ω è un ordinale. $\qquad \emptyset$ è un ordinale

Oss α ordinale e $\beta\in\alpha \Rightarrow \beta$ è un ordinale e $\beta=\alpha_\beta$

Dim α ord. $\beta \in \alpha$

- β è b.o. da $\in$

  $\beta \subset \alpha \overset{\text{trans.}}{\Longrightarrow} \beta \subseteq \alpha \Longrightarrow \beta$ è b.o. da $\in$

- β è transitivo

  $\gamma \in \beta \to \gamma \subseteq \beta$

  $\delta \in \gamma \in \beta \to \delta \in \beta$ (tr. di γ)

  $\delta \in \gamma \in \alpha$ (tr. di α)

  $\delta \in \alpha$

  $\delta \in \gamma \in \beta \to \delta <_\alpha \gamma <_\alpha \beta$

  $\delta \in \beta \leftarrow \delta <_\alpha \beta$

- quindi β è un ordinale

  $\beta = \alpha_\beta$

  $x \in \beta \to x \in \alpha$, $x <_\alpha \beta$ $\Big\}$ $x \in \alpha_\beta$

  $x \in \alpha \to x \in \alpha$

  $x <_\alpha \beta \to x \in \beta$

Esempio tutti gli $n \in \omega$ sono ordinali.

Prop. Siano α, β ordinali $(\alpha, <_\alpha) \simeq (\beta, <_\beta) \Longrightarrow \alpha = \beta$

Dim Sia $f : \alpha \to \beta$ isomorfismo di ordini.

Mi basta dimostrare che $\forall \gamma \in \alpha \; f(\gamma) = \gamma$ (poi estensionalità segue $\beta = f[\alpha] = \alpha$).

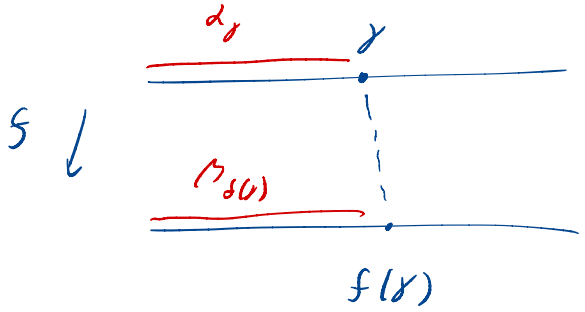
Sia γ è a minimo t.c. $\underline{f(\gamma) \neq \gamma}$

$$\gamma = \alpha_\gamma = f[\alpha_\gamma] = \beta_{f(\gamma)} = f(\gamma)$$

$$[\ \{ f(x) \mid x \in \alpha_\gamma \}$$

$$\{ f(x) \mid x <_1 \gamma \}$$

$$\{ x \mid x <_\alpha \gamma \} = \alpha_\gamma$$



$(A, <) \lesssim (B, <) \overset{\text{def.}}{\equiv}$ "A è iso a un s.i. proprio di B"

Teo "La classe degli ord. è totalmente ordinata da $\in$ (con ordine stretto)."

Siano α e β ordinali allora vale una e una sola delle seguenti:

① $\alpha \in \beta$ ② $\alpha = \beta$ ③ $\beta \in \alpha$

Dim. Vale una e una sola di

① $\alpha \lesssim \beta$ ② $\alpha \sim \beta$ ③ $\beta \lesssim \alpha$

② $\alpha \sim \beta \overset{\text{Prop.}}{\Longrightarrow} \alpha = \beta$

① $\alpha \subsetneq \beta \Rightarrow \exists \gamma \in \beta \quad \alpha \sim \beta_\gamma$

$\alpha \sim \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$

$\Rightarrow \alpha \in \beta$ ☒

Notazione Se α, β sono ord. $\alpha \subsetneq \beta \overset{def.}{\equiv} \alpha \in \beta$

Esercizio $\alpha \in \omega \longleftrightarrow \alpha$ è un ordinale finito.

Prop: α, β ordinali $\quad \alpha \leq \beta \longleftrightarrow \alpha \subseteq \beta$

$\rightarrow$ $\alpha < \beta \overset{trans.}{\longrightarrow} \alpha \subseteq \beta$

$\alpha = \beta \longrightarrow \alpha \subseteq \beta$

$\leftarrow$ Per ass. $\alpha \subseteq \beta \quad \beta < \alpha \rightarrow \beta \in \alpha \subseteq \beta$

$\beta \in \beta$

$\beta < \beta$ ↯

Def $\alpha + 1 \overset{def.}{=} \alpha \cup \{\alpha\}$

Prop. $\alpha + 1$ è il minimo ordinale $> \alpha$

① $\alpha + 1$ è un ordinale

② $\alpha + 1 > \alpha$

③ $\forall \beta > \alpha \quad \alpha + 1 \leq \beta$

Dim ① facile verifica. ② facile verifica.

③ $\alpha < \beta \overset{def.}{\rightarrow} \alpha \in \beta \overset{tr.}{\longrightarrow} \alpha \subseteq \beta$

$\{\alpha\} \subseteq \beta \rightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta \overset{def.}{\longrightarrow} \alpha + 1 \subseteq \beta$

Prop. Sia X un insieme di ordinali non vuoto

1. esiste $\min(X)$
2. esiste il minimo dei maggioranti di X, $\sup(X)$
   α è un maggiorante di X se $\forall x \in X \quad x \leq \alpha$
3. esiste un ordinale $\notin X$

Dim

1. $\min(X) = \bigcap X \qquad \sup(X) = \bigcup X$

TO BE CONTINUED