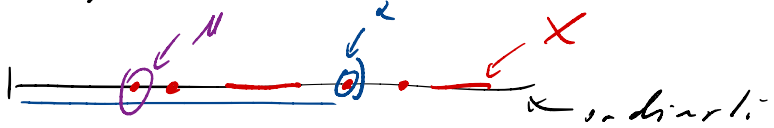
Prop. Sia X un insieme di ordinali non vuoto

1. esiste $\min(X)$
2. esiste il minimo dei maggioranti di X, $\sup(X)$

   α è un maggiorante di X se $\forall x \in X \quad x \leq \alpha$
3. esiste un ordinale $\notin X$

Dim

1. $\min(X) = \bigcap X$
2. $\sup(X) = \bigcup X$
3. $\sup(X) + 1 \notin X$

1. 

Fisso $\alpha \in X$ $\quad \mu \overset{def}{=} \min\left(X \cap (\alpha+1)\right)$

- μ è il minimo di X

  $\beta \in X$ o $\beta \leq \alpha \rightarrow \mu \leq \beta$

  o $\alpha < \beta \rightarrow \mu \leq \alpha < \beta$
- il minimo di X è $\bigcap X$

  devo dimostrare $\bigcap X \subseteq \mu$

  $\beta \in \bigcap X \leftrightarrow \forall \gamma \in X \quad \beta \in \gamma$

  $\leftrightarrow \forall \gamma \in X \quad \beta < \gamma \rightarrow \beta < \mu$

  $\beta \in \mu$

  dimostriamo $\mu \subseteq \bigcap X$ $\qquad \beta < \mu \leq \gamma$

  $\beta \in \mu \rightarrow \beta < \mu \rightarrow \forall \gamma \in X \quad \beta \in \gamma$

  $\beta \in \gamma$

② $Sup(X) = \bigcup X$

Temporaneamente supponiamo $\bigcup X$ sia un ordinale

"α è un maggiorante di X"

$\forall \alpha \in X \ \alpha \in \sigma \leftrightarrow \forall \alpha \in X \ \alpha \subseteq \sigma \leftrightarrow \bigcup X \subseteq \sigma$

da cui l'asserto. $\longleftarrow$ $\bigcup X \leq \sigma$

- $\bigcup X$ è transitivo

  $\alpha \in \bigcup X \rightarrow$ esiste $\beta \in X \ \alpha \in \beta$

  ↓ tr. di β

  $\alpha \subseteq \beta \rightarrow \alpha \in \bigcup X$

- $\bigcup X$ è b.o. da $\in$

  $\bigcup X$ è un insieme di ordinali, quindi è b.o. da $\in$ per ①. ∎

Cor: Un ins. di ordinali è un ordinale se e solo se è transitivo.

Prop: (paradosso di Burali-Forti)
Non esiste l'insieme di tutti gli ordinali
Dim Se esistesse sarebbe esso stesso un ordinale O
Ma allora $O \in O \rightsquigarrow O < O$ ↯

Nota α ordinale $\alpha = \{\beta \text{ ordinale} \mid \beta < \alpha\}$

$0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad \omega \quad \omega+1 \quad \underbrace{\omega+1+1}_{\omega+2} \quad \omega+7 \quad \dots \quad \omega+\omega$

Notazione Chiamiamo **Ord** la classe degli ordinali

$\alpha \in Ord \overset{def.}{\equiv} \alpha$ è transitivo e b.o da $\in$

$\forall \alpha \in Ord \dots \overset{def.}{\equiv} \forall \alpha \, (\alpha \in Ord) \to \dots$

$\exists \alpha \in Ord \dots \overset{def.}{\equiv} \exists \alpha \, (\alpha \in Ord) \wedge \dots$

Prf Una classe è una formula insiemistica $\varphi(x)$

$x \in classe \overset{def.}{\equiv} \varphi(x)$

Def. Date classi A, B, una funzione classe $F : A \to B$ è una formula $\varphi(x,y)$ tale che

$$\forall x \in A \; \exists! y \in B \; \varphi(x,y)$$

Possiamo scrivere una f. classe con la notazione

$$y = F(x) \overset{def.}{\equiv} \varphi(x,y)$$

Es: funzioni classe: $V \to V$ ← tutte le seguenti

$F(x) = \{x\}$ $\quad \varphi(x,y) \equiv x \in y \wedge \forall z \; z \in y \to z = x$

$F(x) = \mathcal{P}(x)$ $\quad \varphi(x,y) \equiv \forall z \; z \in y \leftrightarrow z \subseteq x$

$F(x) = x \cup \{x\}$ $\quad \dots$ $\quad F(x) = \bigcup x$

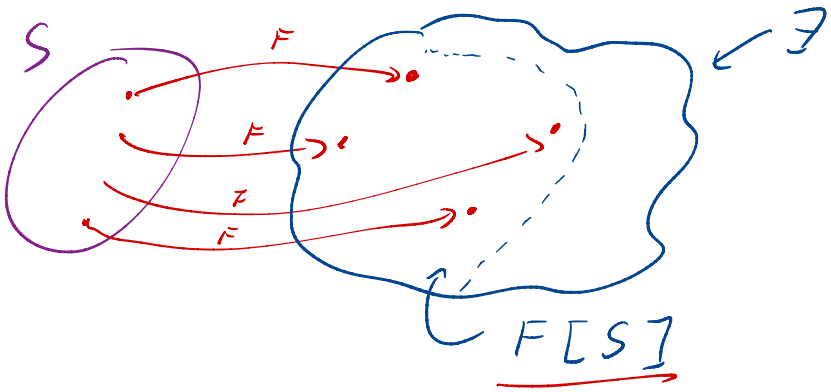
f. classe $Ord \to Ord$ $\quad F(x) = ((x+1)+1)+1$

f. classe $V \to Ord$ $\quad F(x) = \sup(x \cap Ord)$

Assioma (schema di assiomi) del rimpiazzamento

Data una funzione classe $F : V \to V$ vale

$$\forall S \; \exists T \; \forall x \in S \quad F(x) \in T$$



Osservazione

$$\forall S \; \exists! T \; \forall y \quad y \in T \leftrightarrow \exists x \in S \quad F(x) = y$$

Esercizio Dimostrare che dati ins. A e B esiste $A \times B$ usando il rimpiazzamento e non le parti.

Teo Dato un b.o. $(S, <)$ esiste un unico ordinale α t.c. $(S, <) \simeq \alpha$.

Dim Esistenza.

$$S' = \{ x \in S \mid \exists \gamma \in Ord \quad \gamma \sim S_x \}$$

Dato S' definiamo

$$F : S' \longrightarrow Ord$$
$$x \longmapsto \gamma \text{ t.c. } \gamma \sim S_x$$

verifica. $F(x) = \gamma, \gamma'$ $\quad \gamma \sim S_x \sim \gamma' \to \gamma = \gamma'$

Scopo $\alpha \overset{\text{def.}}{=} F[S'] \sim (S, <)$

- α è ordinale: devo dire che α è transitivo, sia $\gamma \in \beta \in \alpha$ devo dire che $\gamma \in \alpha$.

$$\beta = F(x) \to \beta \sim S_x$$

Sia $f : \beta \to S_x$ l'isomorfismo

$$f|_\gamma : \gamma \to (S_x)_{f(\gamma)} = S_{f(\gamma)}$$

Quindi $\gamma = F(f(\gamma))$.

- S' è un s.i. di S $\quad y <_S x \in S' \to y \in S'$

esiste $f : S_x \to \gamma$ isomorfismo con γ ordinale

$S_y \subseteq S_x \quad f|_{S_y} : S_y \to \gamma|_{f(y)} = f(y)$

$\to S_y \sim f(y) \to y \in S'$

- α ed S' sono isomorfi. Consideriamo

$$f : S' \to \alpha$$
$$x \longmapsto F(x)$$

iniettività: $F(x) = F(y) \quad S_x \sim S_y \to x = y$

$x < y \longrightarrow S_x \prec S_y$

S S

$f(x) \prec f(y) \longrightarrow f(x) < f(y)$

- $S' = S$ se no $S' = S_k \sim \alpha \rightarrow k \in S'$

$k \notin S_k$ ↯

□

Esercizio "Dimostrare che esiste $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots\}$"

Dimostrare che esista il più piccolo insieme S contenente l'elemento $\emptyset$ e tale che $\forall x \in S \ \{x\} \in S$

$F(0) = \ldots \quad F(n+1) = G(F(n))$

[funzione classe !

$G(x) = \{x\}$