Induzione e ricorsione transfinita

Esercizio Esiste il più piccolo insieme S t.c.

$\emptyset \in S \wedge \forall x \in S \ \{x\} \in S$

$$S = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$$

Soluzione Basta dire che esiste un S t.c.

$$\emptyset \in S \wedge \forall x \in S \ \{x\} \in S$$

$\bar{S} :=$ il più piccolo $= \{y \in S \mid \forall S' \ (\emptyset \in S' \wedge \forall x \dots) \to y \in S'\}$

$\emptyset \in \bar{S}$ $\qquad (\emptyset \in S'' \wedge \forall x \dots) \to (x \in \bar{S} \to x \in S'')$

$x \in \bar{S} \to \{x\} \in \bar{S}$

Supponiamo che esista f funzione con $Dom(f) = \omega$ t.c. $f(0) = \emptyset \wedge \forall n \in \omega \ f(n+1) = \{f(n)\}$.

$S := f[\omega]$ va bene.

$\emptyset = f(0) \in S$ $\qquad x \in S \to x = f(n)$ per qualche n

$\{x\} = f(n+1) \in S$

Prop. Sia $G : V \to V$ una funzione classe, e S un insieme. Allora esiste f funzione con $Dom(f) = \omega$ t.c.

$$f(0) = S \wedge \forall n \in \omega \ f(n+1) = G(f(n)).$$

Dim

① Ci basta trovare $F : \omega \to V$ funzione classe t.c. $F(0) = S \wedge \forall n \in \omega \ F(n+1) = G(F(n))$

Perché? Sia F questa funzione.
Allora esiste l'insieme $F[w]$ per rimpiazzo.

$$f \overset{def}{=} \{(n, y) \in w \times F[w] \mid y = F(n)\}$$

(2)

$\varphi(n, y)$

$y = F(n) \overset{def.}{\equiv} \exists f$ tale che:

- f è una funzione
- $Dom(f) = n+1 = \{0, 1, \dots, n\}$
- $f(0) = S$
- $\forall m < n \quad f(m+1) = G(f(m))$
- $f(n) = y$

f: $0 \to S$, $1 \to G(S)$, $2 \to G(G(S))$, 3, $\dots$, $n \to y$

(3) $\forall n \; \exists! y \quad y = F(n)$

Per ind. su n

- $n = 0 \quad f = \{(0, S)\} = \{(0, S)\}$
- $n+1$ esistenza

$\exists! y : y = F(n)$

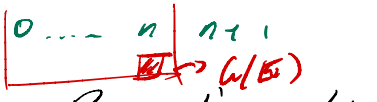
per ipotesi induttiva $\exists f$ funzione $Dom(f) = n+1$ e...

sia $f' = f \cup \{(n+1, G(f(n)))\}$

unicità Siano f_1, f_2 funzioni $Dom(f_1) = Dom(f_2) = n+2$

etc. Devo dire che $f_1(n+1) = f_2(n+1)$

Considero $f_1|_{n+1}$ e $f_2|_{n+1}$



essi soddisfano le ipotesi del caso n. Per l'unicità del caso n, $f_1|_{n+1}(n) = f_2|_{n+1}(n)$ ossia $f_1(n) = f_2(n)$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(n+1) = G(f_1(n)) \\ f_2(n+1) = G(f_2(n)) \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{perché } G \text{ è una f. classe}} f_1(n+1) = f_2(n+1)$$

④ Verificare che $F(n+1) = G(F(n))$.

Supponiamo $y = F(n)$ allora $\exists f$ $Dom(f) = n+1$ ....
Osserviamo che $f \cup \{(n+1, G(y))\}$ testimonia che $G(y) = F(n+1)$.

$\forall x \in A \quad x \subseteq A$

Es Dato S esiste il più piccolo insieme transitivo che ha S come sottoinsieme $tc(S)$.

Soluzione

- Basta dimostrare che $\exists A$ transitivo $S \subseteq A$.
  (perché un'intersezione di transitivi è transitiva).
- $A = S \cup \bigcup S \cup \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ x}}{\bigcup\bigcup S} \cup \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\subseteq$} \\ x}}{\bigcup\bigcup\bigcup S} \cup \ldots$

$f(0) = S \qquad f(n+1) = \bigcup f(n)$

$A_0 = S \qquad \forall n \in \omega \quad A_{n+1} = \bigcup A_n$

$A := \bigcup \{A_n \mid n \in \omega\}$

$S = A_0 \subseteq A$

$x \in A \to x \in A_n$ per qualche $n \in \omega$

$x \subseteq \bigcup A_n = A_{n+1} \subseteq A$

Prop (INDUZIONE TRANSFINITA – V. 1)

Sia $\varphi(x)$ una proprietà insiemistica (formula)

Se $\forall \alpha \in Ord \ (\forall \beta < \alpha \ \varphi(\beta)) \to \varphi(\alpha)$

Allora $\forall \alpha \in Ord \ \varphi(\alpha)$

Dim

Supponiamo per assurdo che per qualche $\alpha_0 \in Ord$ valga $\neg\varphi(\alpha_0)$. Considero α_1 minimo t.c. $\neg\varphi(\alpha_1)$.

$$\alpha_1 := \min \{ \beta \in \alpha_0 + 1 \mid \neg\varphi(\beta) \}$$

$$(\forall \beta < \alpha_1, \varphi(\beta)) \to \varphi(\alpha_1)$$

vera per la minimalità di α_1

$\lightning$

Def Un ordinale α è _successore_ se $\exists \beta \ \alpha = \beta + 1$ e _limite_ se $0 < \alpha$ e non è successore.

ordinale $\leftrightarrow$ 0, successore, limite.

Es. 7 è successore

ω è limite

Esercizio α è successore $\leftrightarrow$ α ha un massimo.

Prop. (INDUZIONE TRANSFINITA – V.2)

Sia $\varphi(x)$ una proprietà insiemistica.

Supponiamo
- $\varphi(0)$
- $\forall \alpha \in Ord \quad \varphi(\alpha) \to \varphi(\alpha+1)$
- $\forall \lambda$ ord. limite $(\forall \beta < \lambda \ \varphi(\beta)) \to \varphi(\lambda)$

Allora $\forall \alpha \in Ord \ \varphi(\alpha)$

Dim Per induzione transfinita (V.1)

Dobbiamo verificare che

$$\forall \alpha \in Ord \ (\forall \beta < \alpha \ \varphi(\beta)) \to \varphi(\alpha)$$

- α limite: è un'ipotesi
- $\alpha = 0$: per ipotesi $\varphi(0)$ $\quad \vdash\!\dashv \to$ vero
- $\alpha = \gamma + 1$: $\underline{(\forall \beta < \alpha \ \varphi(\beta))} \to \varphi(\gamma) \to \varphi(\gamma+1) \leftrightarrow \underline{\varphi(\alpha)}$

ip. induttiva

$\boxtimes$

Nota Data una funzione classe $F: A \to B$ e un insieme $X \subseteq A$ $(\forall x \in X \ x \in A)$ esiste la funzione

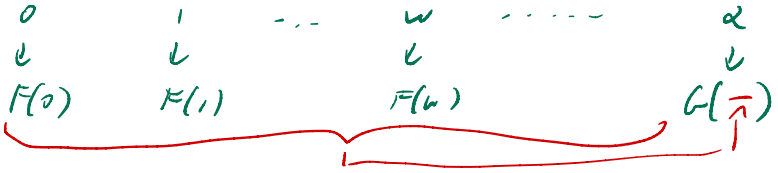
$$F|_X \overset{def}{=} \{(x,y) \in X \times F[X] \mid y = F(x)\}$$

Teo (RICORSIONE TRANSFINITA)

Data una funzione classe $G: V \to V$ esiste un'unica* funzione classe $F: Ord \to V$ t.c.

$$\forall \alpha \in Ord \quad F(\alpha) = G(F|_\alpha)$$

$\ulcorner$ se F_1 e F_2 soddisfano ... $\forall \alpha \in Ord \ F_1(\alpha) = F_2(\alpha)$ $\lrcorner$



$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \dots & \omega & \dots & \alpha \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F(0) & F(1) & & F(\omega) & & G(\overline{\ }) \end{array}$$

Es. La funzione classe $Ord \to Ord$ $\quad \alpha \mapsto \alpha+1$
è crescente (strettamente).