Tro (forma normale di Cantor)

Ogni ordinale α può essere espresso in maniera unica come somma finita

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

con $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n$ ordinali e $k_1, k_2, \dots, k_n \in \omega \setminus \{0\}$.

$$(\omega+1)^2 = \omega^2 + \omega + 1 \qquad (\omega+1)^3 = \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1$$

$$\omega^{\omega^\omega \cdot 17 + \omega^5 \cdot 9 + \omega^2 \cdot 1} + \omega^{93+15} + \omega^{\omega^{33+14}} + \omega^1$$

$$\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}} = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots\}$$

$$\varepsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0}$$

Def Una funzione classe $F : Ord \to Ord$ crescente è **continua** se $\forall \lambda$ ord. limite $F(\lambda) = \sup F[\lambda]$

Esempi:

$\alpha \longmapsto \beta + \alpha$

$\beta > 0 \to \quad \alpha \longmapsto \beta \cdot \alpha$

$\beta > 1 \to \quad \alpha \longmapsto \beta^\alpha$

} sono crescenti e continue

Prop: Sia $F : Ord \to Ord$ crescente e continua (f. classe).
Allora $\exists \pi \in Ord \quad F(\pi) = \pi$

Dim

$\pi_0 = 0$

$\pi_{n+1} = F(\pi_n)$

π_0	π_1	π_2	...
0	$F(0)$	$F(F(0))$	....

$\pi_\square : \omega \longrightarrow Ord$

- se $F(0) = 0$ $\quad \pi = 0$.
- $\pi \overset{def.}{=} \sup \{ \pi_n \mid n \in \omega \}$

(1) $n \mapsto \pi_n$ è crescente poiché $\pi_n < \pi_{n+1}$.

o questo si fa per induzione

- $\pi_0 = 0 < F(0) = \pi_1$
- $\pi_n < \pi_{n+1} \implies \pi_{n+1} = F(\pi_n) < F(\pi_{n+1}) = \pi_{n+2}$

(2) π è limite

per assurdo, se no $\pi = \beta + 1$ e esiste un k t.c. $\pi_k > \beta$.

$\beta < \pi_k < \pi_{k+1} \implies \beta + 2 \leq \pi_{k+1} \leq \pi = \beta + 1$ ↯

(3) $F(\pi) = \sup F[\pi]$ (U1)

$= \sup \{ F(\pi_i) \mid i \in \omega \}$

$= \sup \{ \pi_{i+1} \mid i \in \omega \} = \pi$ ∎

Cor. Esiste α t.c. $\omega^\alpha = \alpha$

Def (curiosità) il minimo punto fisso di $\alpha \mapsto \omega^\alpha$ si chiama ε_0.

Esercizio $\varepsilon_0 = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}$

formalmente definiamo $\alpha_0 = \omega \quad \alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$

Dim. che $\varepsilon_0 = \sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\}$

Esercizio Sia $F : Ord \to Ord$ crescente e continua s. cl.
esiste $G : Ord \to Ord$ crescente t.c.

$$F(\alpha) = \alpha \iff \exists \eta \in Ord \quad \alpha = G(\eta)$$

Idea: per ric. transfinita dimostrando che
$\forall \gamma \ \exists \alpha \geq \gamma \quad F(\alpha) = \alpha$.

Esercizio La $\aleph$ di prima è continua.

Def $\varepsilon_\alpha \overset{def}{=}$ l'α-esimo punto fisso $x \mapsto \omega^x$
$= \aleph(\alpha)$ procedendo $F(x) = \omega^x$

La forma normale

Lemma Siano $\alpha \leq \gamma$ ordinali. Esiste un unico β t.c. $\alpha + \beta = \gamma$.

Dim

Sia δ minimo tale che $\alpha + \delta > \gamma$.

- δ esiste: $\alpha + (\gamma + 1) \geq \gamma + 1 > \gamma$.

- supponiamo $\delta = \beta + 1$ successore

$$\alpha + \beta \leq \gamma < \underbrace{\alpha + \beta + 1}_{\alpha + \delta}$$

- supponiamo δ limite

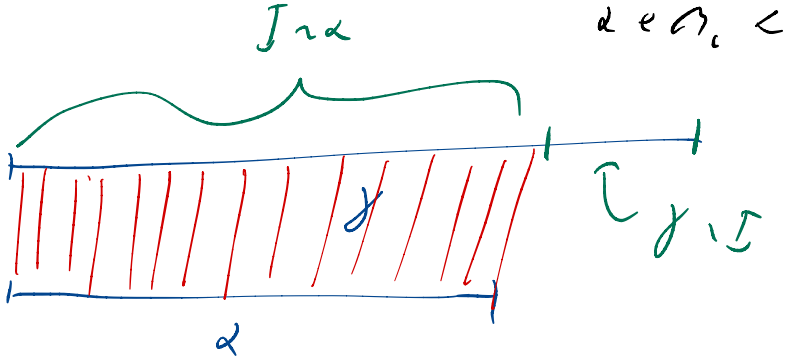
$$\gamma < \alpha + \delta = \sup \{\alpha + \xi \mid \xi < \delta\}$$

$$\rightarrow \exists\, \xi < \delta \quad \gamma < \alpha + \xi \quad \lightning$$

Unicità $\alpha + \beta_1 = \gamma = \alpha + \beta_2$ $\qquad \beta_1 < \beta_2$

$\downarrow$

$\alpha + \beta_1 < \alpha + \beta_2$ $\lightning$



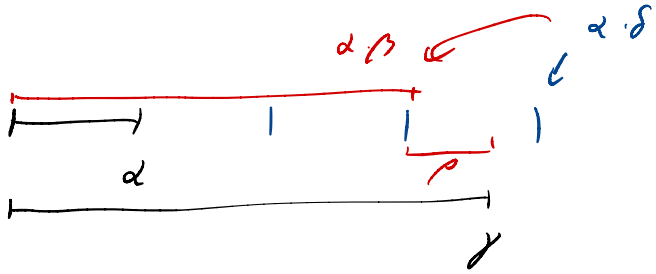
Prop: Siano α, γ ordinali $\alpha \neq 0$. Esiste un unico β e un unico $\rho < \alpha$ t.c. $\gamma = \alpha \cdot \beta + \rho$.

Dim Esistenza. Sia δ minimo t.c. $\alpha \cdot \delta > \gamma$.

- δ esiste

$\alpha \geq 1$

$\alpha \cdot (\gamma + 1) \geq \gamma + 1 > \gamma$



- se $\delta = \eta + 1$ è successore.

$$\alpha \cdot \eta \leq \gamma \rightarrow \exists \rho \quad \alpha \cdot \eta + \rho = \gamma$$

Supponiamo per assurdo $\rho \geq \alpha$

$$\alpha \cdot \beta + \rho \geq \alpha \cdot \beta + \alpha = \alpha(\eta + 1) = \alpha \cdot \delta > \gamma$$

- se δ è limite

$$\gamma < \alpha \cdot \delta = \sup \{ \alpha \cdot \xi \mid \xi < \delta \}$$

$$\rightarrow \exists \xi < \delta \quad \alpha \cdot \xi > \gamma \quad \rightsquigarrow$$

Unicità Basta dire che β è unico.

Per assurdo siano $\gamma = \alpha \cdot \beta_1 + \rho_1 = \alpha \cdot \beta_2 + \rho_2$ con $\beta_1 < \beta_2$

$\rho_1 < \alpha$

$$\alpha \cdot \beta_1 + \rho_1 \leq \alpha \cdot \beta_1 + \alpha = \alpha \cdot (\beta_1 + 1) \leq \alpha \cdot \beta_2 \qquad \beta_1 + 1 \leq \beta_2$$

$$\leq \alpha \cdot \beta_2 + \rho_2 \quad \rightsquigarrow$$

Teo (forma normale di Cantor)

Ogni ordinale α può essere espresso in maniera unica come somma finita

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

con $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n$ ordinali e $k_1, k_2, \dots, k_n \in \omega \setminus \{0\}$.

Dim Idea: prendo δ minimo t.c. $\omega^\delta > \alpha$,

(Esistenza: Per assurdo) considero α minimo che non ha una forma normale.

- Se $\delta = \beta_1 + 1$ è successore, sia

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \rho$$

  - $k_1 \neq 0$

    $k_1 = 0 \to \alpha = \rho < \omega^{\beta_1}$

  - $k_1 \in \omega$

    $k_1 \geq \omega \quad \alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \rho \geq \omega^{\beta_1} \cdot \omega = \omega^{\beta_1 + 1} = \omega^\delta$

  - $\rho < \omega^{\beta_1} \leq \alpha \rightsquigarrow \rho$ ha una forma normale

$$\rho = \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots$$

  assumiamo che

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots$$

  è una f.n.

  C'è da verificare che $\beta_1 > \beta_2$

so, per assurdo $\beta_2 \geq \beta_1$

$$\underline{w^{\beta_1} > \rho} = w^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots \geq w^{\beta_2} \geq \underline{w^{\beta_1}}$$ α non ha f.n.

$\rightsquigarrow$ ⊠

Unicità

$$\underline{w^{\beta_1} \cdot k_1} + \underline{w^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots} = \underline{w^{\beta_1'} \cdot k_1'} + \underline{w^{\beta_2'} \cdot k_2' + \dots}$$

$$\beta_1 < \beta_1' \rightarrow \beta_1 + 1 \leq \beta_1'$$

$$w^{\beta_1} \cdot k_1 + w^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots \leq w^{\beta_1} \cdot k_1 + w^{\beta_1} \cdot k_2 + \dots$$

$$= w^{\beta_1} \underbrace{(k_1 + \dots + k_n)}_{< w} < w^{\beta_1} \cdot w = w^{\beta_1 + 1} \leq w^{\beta_1'}$$

$$\leq w^{\beta_1'} k_1' + w^{\beta_2'} k_2' + \dots$$

$\rightsquigarrow$ ⊠

<u>Nota</u>: una formula insiemistica che dice "α ha una forma normale" può essere scritta in questo modo

somme parziali

$\exists \underbrace{\beta, k}_{\text{coeff. della f.n.}}, s, n$ $\quad$ β, k, s sono funzioni $\wedge$ $n \in \omega$

$\forall i < n \quad \beta_i \in Ord \wedge k_i \in \omega - \{0\}$

$\forall i \in \omega \ (i+1 < n) \rightarrow \underbrace{\beta_i > \beta_{i+1}}_{\text{gli esponenti decrescono}} \wedge \underbrace{s_{i+1} = s_i + w^{\beta_i} \cdot k_i}_{\text{le somme parziali funzionano}}$

$s_0 = 0 \quad \wedge \quad s_n = \alpha$

Esercizio * difficile (senza leggere l'idra qua sotto) $|\varepsilon_0| = \aleph_0$

Idea: dimostrare che $\alpha < \varepsilon_0$ se e solo se α può essere scritto a partire da $0, 1, \omega$, applicando le operazioni di somma, prodotto, ed esponente ordinale un numero finito di volte.

Esercizio * * ostico Sia ζ_0 minimo t.c. $\varepsilon_{\zeta_0} = \zeta_0$, allora $|\zeta_0| = \aleph_0$.

Esercizio Sia γ un qualunque ordinale ≥ 2. Ogni ordinale α si scrive in modo unico come somma finita

$$\alpha = \gamma^{\beta_1} k_1 + \ldots + \gamma^{\beta_n} k_n$$

con $\beta_1 > \ldots > \beta_n$ e $k_1 \ldots k_n < \gamma$.

Esercizio (che è anche un'utile proposizione da ricordare)
Siano $\alpha < \omega^\delta$ e $\omega^\delta \leq \beta$, allora $\alpha + \beta = \beta$.