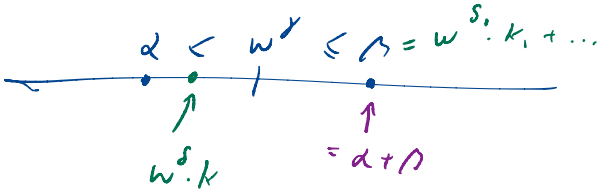
Esercizio (che è anche un'utile proposizione da ricordare)

Siano $\alpha < \omega^\gamma$ e $\omega^\delta \leq \beta$, allora $\alpha + \beta = \beta$.

Soluzione



$\delta < \varepsilon \quad \omega^\delta + \omega^\varepsilon = \omega^\delta (1 + \omega^{\varepsilon'}) = \omega^\delta (1 + \omega + \xi) = \omega^\delta (\omega + \xi) =$

($\delta + \varepsilon'$; $\omega + \xi$; $1 + \omega = \omega$)

$= \omega^\delta \cdot \omega^{\varepsilon'} = \omega^{\delta + \varepsilon'} = \omega^\varepsilon$

$\alpha \leq \omega^\delta \cdot k < \omega^\gamma \leq \beta = \underbrace{\omega^{\delta_1} \cdot k_1 + \dots}_{\text{Forma normale}}$

$\beta \leq \alpha + \beta \leq \omega^\delta \cdot k + \omega^{\delta_1} \cdot k_1 + \dots =$

($\omega^\delta + \omega^\delta + \omega^\delta + \dots + \omega^{\delta_1}$)

$= \underbrace{\left(\omega^\delta \cdot k + \omega^{\delta_1}\right)}_{\omega^{\delta_1}} + \omega^{\delta_1}(k_1 - 1) + \dots$

Basta osservare che $\exists \delta, k$ tali che $\alpha \leq \omega^\delta \cdot k < \omega^\gamma$

$\alpha = \omega^{\delta_1} \cdot k_1 + \omega^{\delta_2} \cdot k_2 + \dots \leq^*$

$\delta_1 < \gamma$ altrimenti avremmo $\alpha \geq \omega^{\delta_1} \geq \omega^\gamma$ ma

$^* \leq \omega^{\delta_1} \cdot k_1 + \omega^{\delta_1} k_2 + \omega^{\delta_1} k_3 = \omega^{\delta_1} \underbrace{(k_1 + k_2 + k_3 + \dots)}_{\in \omega}$

Regole di calcolo

Somma:

$$\omega^\alpha \cdot c + \omega^\beta \cdot d = \begin{cases} \omega^\alpha \cdot c + \omega^\beta \cdot d & \beta < \alpha \\ \omega^\alpha (c+d) & \beta = \alpha \\ \omega^\beta \cdot d & \beta > \alpha \end{cases}$$

$c, d \in \omega \setminus \{0\}$

Prodotti: $(\ast) \cdot (\omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + \dots) =$

$= (\ast) \cdot \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + (\ast) \cdot \omega^{\alpha_2} \cdot k_2 + \dots$

$\beta > 0$

$$(\omega^{\alpha_1} k_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot k_2 + \dots) \cdot \omega^\beta = \omega^{\alpha_1 + \beta}$$

$$(\omega^{\alpha_1} k_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot k_2 + \dots) \cdot n = \omega^{\alpha_1} k_1 \cdot n + \omega^{\alpha_2} \cdot k_2 + \omega^{\alpha_3} \cdot k_3 + \dots$$

Dim $\quad n \cdot \omega = (\omega^0 \cdot n) \cdot \omega^1 = \omega^{0+1} = \omega \qquad$ con $n > 0$

$$\omega \leq n \cdot \omega \leq \sup \{ \underbrace{n \cdot i}_{\in \omega} \mid i < \omega \} \leq \omega$$

$+\omega^{\alpha_1}$ $\qquad 1+\gamma$

$$\omega^{\alpha+\beta} \leq (\omega^{\alpha_1} k_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot k_2 + \dots) \cdot \omega^\beta \leq \omega^{\alpha_1} (k_1 + 1) \cdot \omega^\beta$$

$$= \omega^{\alpha_1} (k_1 + 1) \cdot \omega \cdot \omega^\gamma = \omega^{\alpha_1} \cdot \omega \cdot \omega^\gamma = \omega^{\alpha_1 + 1 + \gamma} = \omega^{\alpha_1 + \beta}$$

$$(\omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + \dots) \cdot (n+1) = (\dots) \cdot n + \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + \dots =$$

$$= \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 \cdot n + \omega^{\alpha_2} \cdot k_2 + \dots + \omega^{\alpha_1} k_1 + \omega^{\alpha_2} k_2 + \dots =$$

$$= \omega^\alpha (k_1 \cdot n + k_1) + \omega^{\alpha_2} \cdot k_2 + \dots$$

Potenze $\quad \alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha^1 \qquad \alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{n \text{ volte}}$

$k \in \omega \setminus \{0,1\}$ $\qquad k^{\omega^{1+\alpha}} = \omega^{\omega^\alpha}$

$k^{\omega \cdot \omega^\alpha} = (k^\omega)^{\omega^\alpha}$ (ω volte)

$\alpha_1 > 0 \quad n > 0 \rightarrow \left(\omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + \omega^{\alpha_2} k_2 + \ldots\right)^{\omega^n} = \omega^{\alpha_1 \omega^n}$

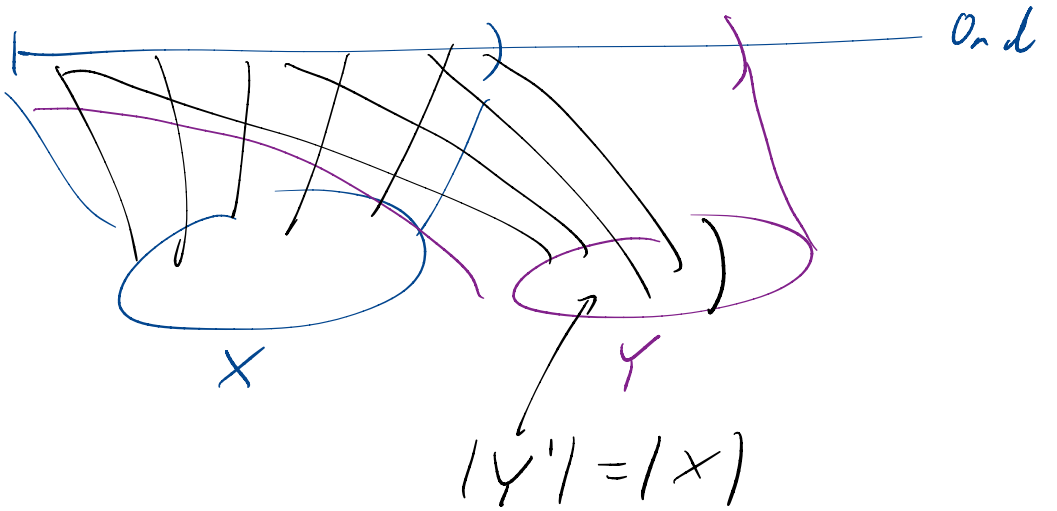
- $(\omega+1)^2 = (\omega+1)\cdot(\omega+1) = (\omega+1)\cdot\omega + \overbrace{\omega+1}^{(\omega+1)\cdot 1} = \omega^2 + \omega + 1$
- $(\omega+1)^2 \cdot n = (\omega^2+\omega+1)\cdot n = \omega^2 \cdot n + \omega + 1$ con $n \in \omega \setminus \{0\}$
- $(\omega+1)^2 \cdot \omega = (\omega^2+\omega+1)\cdot\omega^1 = \omega^3$
- $(\omega+1)^3 = (\omega^2+\omega+1)(\omega+1) = (\omega^2+\omega+1)\omega + \omega^2+\omega+1 = \omega^3+\omega^2+\omega+1$
- $(\omega+1)^n = \sum_{i=n}^{0} \omega^i \qquad n < \omega$

  induzione:

  $(\omega+1)^{n+1} = (\omega+1)^n(\omega+1) = \left(\sum_{i=n}^{0} \omega^n\right)(\omega+1)$

  $= \left(\sum\right)\cdot\omega + \sum = \omega^{n+1} + \sum_{i=n}^{0} \omega^n = \sum_{i=n+1}^{0} \omega^i$

- $(\omega+1)^\omega = \omega^\omega$



Def Un ordinale α è **iniziale** se $\forall \beta < \alpha \quad |\beta| < |\alpha|$

Esempi: numeri naturali (ord. finiti), ω

Prop: Se X è un insieme **ben ordinabile*** allora esiste un unico ord. iniziale α t.c. $|\alpha| = |X|$.

* $\exists R \subseteq X \times X$ "R è un b.o. su X"

Dim unicità: $|\alpha_1| = |X| = |\alpha_2|$ senza perdita di gen. $\alpha_1 < \alpha_2$.
Contraddicendo il fatto che α_2 è iniziale.

Considero $(X, <)$ b.o. su X. Allora esiste un ord. $\alpha \sim (X, <)$.

$$k = \min \{ \beta \in Ord \mid |\beta| = |X| \}$$
$$= \min \{ \beta \in \alpha + 1 \mid |\beta| = |X| \}$$

Dico che k è iniziale. Per assurdo se esiste $\gamma < k$ con $|\gamma| \geq |k|$ allora $|\gamma| = |k| = |X|$ contro la minimalità di k

$\square$

Paradosso delle c. normali $\rightsquigarrow$ $|X| < |\mathcal{P}(X)|$

$\{x \mid x \notin x\}$

f. di Hartogs

Paradosso di Burali-Forti $\rightsquigarrow$ $|\alpha| < |H(\alpha)|$

ord. iniziali

<u>Prop</u> Dato un insieme X, esiste $\alpha \in Ord$ t.c. non esistono funzioni iniettive $\alpha \to X$.

<u>Dim</u>

$Y = \{ R \in \mathcal{P}(X \times X) \mid \exists X' \subseteq X \ R$ è un b.o. su $X' \}$

tutti i b.o. su sottoinsiemi di X

Sia $F : Y \to Ord$ la f. classe che associa ad un b.o. il suo ordinale $F(R) \sim R$

Sia $\alpha \in Ord$ t.c. $\alpha \notin F[Y]$.

Se per assurdo $f : \alpha \to X$ in. allora $f[\alpha]$ è b.o.

e $\sim \alpha$ $\rightsquigarrow$ $\boxtimes$

<u>Oss</u> $\alpha, \beta \in Ord \to |\alpha| \leq |\beta| \vee |\beta| \leq |\alpha|$

$\to |\alpha| < |\beta| \vee |\beta| < |\alpha| \vee |\alpha| = |\beta|$

<u>Es.</u> $\exists \alpha$ ordinale con $|\alpha| > \aleph_0$

<u>Dim</u> Esiste α t.c. $\forall X \subseteq \omega \ |\alpha| \neq |X|$

$\Rightarrow |\alpha| \not\leq |\omega| \Rightarrow |\omega| < |\alpha|$ $\blacksquare$

Def Dato un insieme X

$H(X) = \alpha \iff \alpha$ è minimo t.c. $\forall Y \subseteq X \quad |\alpha| \neq |Y|$

Oss $H(X)$ è sempre iniziale.

Se no, $\exists \beta$ iniziale $|\beta| = |H(X)| = |\alpha|$ ma questo nega la minimalità di α.

$w_0 = w \quad w_1 = H(w_0) \quad w_2 = H(w_1) \ldots w_n = \sup \{w_i\}_{i<w} \ldots$