Esame del 5.VI.2013

B.2 – Trovare gli ordinali x che soddisfano l'equazione $2x = x + 1$.

B.3 – Trovare gli ordinali x che soddisfano l'equazione $2x + 1 = x$.

~~B.4 – Siano $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ ordinali. Dimostrare che, se l'equazione $\alpha_1 x + \beta_1 = \alpha_2 x + \beta_2$ ha più di una soluzione, allora ne ha infinite.~~

B.2 x limite $\to$ $2x$ limite $\to$ $x+1$ limite ma

$x := y + 1$ $\qquad 2(y+1) = y+1+1 \iff 2y = y$

$2y + 2$ $\qquad y + 2$

← PERCHÉ $x \mapsto x+1$ È INIETTIVA!

Oss. $\quad y = w \to 2y = y$

* $y = w \cdot \alpha \to 2y = 2(w \cdot \alpha) = (2w) \cdot \alpha = w \cdot \alpha = y$

$y = w \cdot \alpha + \rho$ con $\rho < w$ minore $\quad 2y = y \iff \rho = 0$

$\iff y$ è lim. tr.

Dim. $\Leftarrow$ osservazione *

$\Rightarrow \quad 2y = 2(w \cdot \alpha + \rho) = 2w\alpha + 2\rho = w\alpha + 2\rho$

$y = w\alpha + \rho$ $\qquad 2\rho = \rho \Rightarrow \rho = 0.$

Quindi $2x = x + 1 \iff x = w \cdot \alpha + 1$ per qualche α.

Altro modo

$$x = w^{\alpha_1} \cdot k_1 + w^{\alpha_2} \cdot k_2 + \dots + w^{\alpha_n} \cdot k_n$$

$\beta > 0 \to (w^{\alpha_1} \cdot k_1 + w^{\alpha_2} \cdot k_2 + \dots) \cdot w^\beta = w^{\alpha_1 + \beta}$

$n \cdot w^\beta = (w^0 \cdot n) \cdot w^\beta = w^\beta$

$$2x = 2w^{\alpha_1} k_1 + \dots + \underbrace{2w^{\alpha_n} \cdot k_n}_{* \; 2 \cdot k_n} \begin{cases} w^{\alpha_1} k_1 + \dots + w^{\alpha_n} \cdot k_n & \text{se } \alpha_n > 0 \\ w^{\alpha_1} k_1 + \dots + w^{\alpha_{n-1}} k_{n-1} + 2k_n & \text{se } \alpha_n = 0 \; * \end{cases}$$

$$x + 1 = w^{\alpha_1} k_1 + \dots + w^{\alpha_n} k_n + 1 \begin{cases} w^{\alpha_1} k_1 + \dots + w^{\alpha_n} k_n + 1 & \alpha_n > 0 \\ w^{\alpha_1} k_1 + \dots + w^{\alpha_{n-1}} k_{n-1} + (k_n + 1) & \alpha_n = 0 \end{cases}$$

• caso $\alpha_n > 0$

$$\overbrace{w^{\alpha_1} k_1 + \dots + w^{\alpha_n} \cdot k_n}^{2x} = \overbrace{w^{\alpha_1} k_1 + \dots + w^{\alpha_n} k_n + 1}^{x+1}$$

nessuna soluzione

• caso $\alpha_n = 0$

$$\overbrace{\underbrace{w^{\alpha_1} k_1 + \dots + w^{\alpha_{n-1}} k_{n-1}} + \underline{2k_n}}^{2x} = \overbrace{\underbrace{w^{\alpha_1} k_1 + \dots + w^{\alpha_{n-1}} k_{n-1}} + \underline{(k_n + 1)}}^{x+1}$$

$$2k_n = k_n + 1 \iff k_n = 1$$

In definitiva x risolve l'equazione se e solo se $x = w^{\alpha_1} \cdot k_1 + \dots + w^{\alpha_{n-1}} k_{n-1} + w^0 \cdot 1$ in forma normale.

B.3 $\quad 2x + 1 = x$

x è successore sia $y = 2x$ per cui $x = y + 1$

$$\underline{x} = y + 1 \underline{>} y = 2x \geq \underline{x} \quad \rightsquigarrow$$

Quindi non ci sono soluzioni.

<u>Altro modo</u>

$$x = w^{\alpha_1} \cdot k_1 + w^{\alpha_2} \cdot k_2 + \dots + w^{\alpha_n} \cdot k_n$$

$$2x = 2w^{\alpha_1} k_1 + \dots + \underbrace{2w^{\alpha_n} \cdot k_n}_{* \; 2 \cdot k_n}$$

$\nearrow w^{\alpha_1} k_1 + \dots + w^{\alpha_n} \cdot k_n$ se $\alpha_n > 0$

$\searrow w^{\alpha_1} k_1 + \dots + w^{\alpha_{n-1}} k_{n-1} + 2k_n$ se $\alpha_n = 0$ *

• caso $\alpha_n > 0$

per l'eq. data.

$$2x + 1 = w^{\alpha_1} k_1 + \dots + w^{\alpha_n} k_n + \underline{w^0 \cdot 1} = w^{\alpha_1} k_1 + \dots + w^{\alpha_n} k_n \; \underline{?}$$

Nessuna sol.

• caso $\alpha_n = 0$

per l'eq.

$$2x+1 = \omega^{\alpha_1} k_1 + \dots + \omega^{\alpha_{n-1}} k_{n-1} + \omega^0 \underline{(2k_n+1)} = \omega^{\alpha_1} k_1 + \dots + \omega^{\alpha_{n-1}} k_{n-1} + \omega^0 \cdot \underline{k_n}$$

$$2k_n + 1 = k_n \rightsquigarrow$$

Nessuna soluzione.

<u>Teo</u> (ricorsione transfinita)

Data una funzione classe $G: V \to V$ esiste un'unica* funzione classe $F: \mathrm{Ord} \to V$ tale che

$$\forall \alpha \in \mathrm{Ord} \quad F(\alpha) = G(F_{|\alpha})$$

*oggia date F, F' come sopra, vale $\forall \alpha \in \mathrm{Ord}\ F(\alpha) = F'(\alpha)$.

<u>Dim</u>

$$\alpha \longmapsto F_{|\alpha}$$

Definiamo "$H(\alpha) = F_{|\alpha}$"

$$f = H(\alpha) \overset{\text{def}}{\equiv} \begin{cases} f \text{ è una funzione} \\ \wedge \\ \mathrm{Dom}(f) = \alpha \\ \wedge \\ \forall \beta < \alpha \quad f(\beta) = G(f_{|\beta}) \end{cases}$$

$$F(\alpha) = H(\alpha+1)(\alpha)$$

Verifichiamo che H è una f. classe. $\forall \alpha\ \exists! f\ f = H(\alpha)$ per ind. transfinita su α.

- caso 0 $\quad f = H(0) \iff f = \emptyset$.

- caso $\alpha+1$ Sia $f = H(\alpha)$ sostituiamo che

$$f' = f \cup \{(\alpha, G(f))\}$$

è l'unica che soddisfa $f' = H(\alpha+1)$.

$$Dom(f') = Dom(f) \cup \{\alpha\} = \alpha \cup \{\alpha\} = \alpha+1$$

$\beta < \alpha+1$ → $\beta < \alpha$ ok per ipotesi induttiva

$\beta = \alpha$ $\quad f'(\alpha) = G(f) = G(f'|_\alpha)$

unicità $\quad f' = H(\alpha+1) \to f'|_\alpha = H(\alpha)$ // ip. induttiva

$$f'' = H(\alpha+1) \to f''|_\alpha = H(\alpha)$$

$\to \forall \beta < \alpha \quad f'(\beta) = f''(\beta)$ *

$\forall \beta < \alpha+1 \quad f'(\beta) = f''(\beta)$

→ $\beta < \alpha$ ⟶ ok *

→ $\beta = \alpha$ $\quad f'(\alpha) = G(f'|_\alpha) = G(f''|_\alpha) = f''(\alpha)$

- caso $H(\lambda)$ con λ limite



$$f = \bigcup \{H(\alpha) \mid \alpha < \lambda\} \implies f = H(\lambda)$$

- f è una funzione

$\alpha < \beta < \lambda \to H(\alpha) = H(\beta)|_\alpha$ ✓ $Dom(H(\alpha))$

basta verificare che $g = H(\beta)|_\alpha$ soddisfa $g = H(\alpha)$

$\alpha < \beta \Rightarrow D_{1-}(H(\alpha)) \cap D_{0-}(H(\beta)) = D_{0-}(H(\alpha)) = \alpha$

- $D_{1-}(f) = \bigcup \{ D_{1-}(H(\alpha)) \mid \alpha < \lambda \}$
  $\int$ ip. induttiva
  $= \bigcup \{ \alpha \mid \alpha < \lambda \} = \lambda.$

- $\beta < \lambda \qquad f(\beta) = h(f|_\beta)$

  poniamo $\beta < \alpha < \lambda$

  costr. ↓ ip. induttiva ↓

  $f(\beta) = f_\alpha(\beta) \overset{*}{=} H(\alpha)(\beta) = h(H(\alpha)|_\beta) = h(f|_\beta)$

Unicità $\qquad f_1 = H(\lambda) \qquad f_2 = H(\lambda) \qquad \beta < \alpha < \lambda$

$f_1(\beta) = H(\lambda)(\beta) \qquad f_2(\beta) = H(\alpha)(\beta)$

Abbiamo concluso che $\forall \alpha \; \exists! f \quad f = H(\alpha)$

$F(\alpha) \overset{def.}{=} H(\alpha+1)(\alpha)$

$F(\alpha) = H|(\alpha+1)(\alpha) = h(\underbrace{H(\alpha+1)|_\alpha}_{= H(\alpha)}) = h(H(\alpha)) = h(F|_\alpha)$

* preso $\beta < \alpha$

$F|_\alpha(\beta) = F(\beta) = H(\beta+1)(\beta) = H(\alpha)|_{\beta+1}(\beta) = H(\alpha)(\beta)$

Unicità di F. F, F' soddisfano la richiesta. Sia α minimo t.c. $F(\alpha) \neq F'(\alpha)$

$F(\alpha) = h(F|_\alpha) = h(F'|_\alpha) = F'(\alpha)$ ↯