L'assioma di scelta

$$\lambda'_k = 2^{\aleph_0} \overset{?}{\leq} \aleph_1$$

OPS: è sbagliato!

~~Teo~~ (König – 1905)

$\mathbb{R}$ non è ben ordinabile.

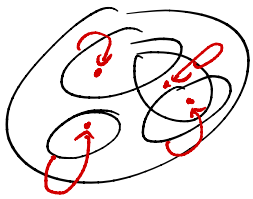
Teo (Zermelo – 1905)

Ogni insieme è ben ordinabile.

Assioma della scelta (AC)

Dato un insieme S di insiemi non vuoti, esiste una funzione di scelta per S.

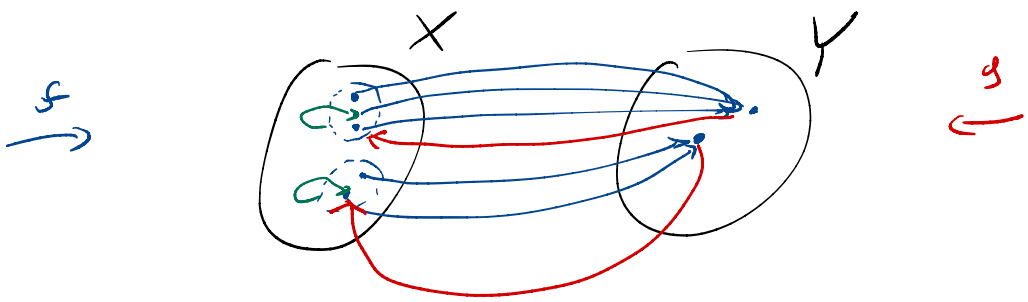
$$f : S \to \bigcup S$$
$$A \mapsto f(A) \in A$$



$$\forall S \left(\forall x \in S \; x \neq \emptyset \right) \to \exists f : S \to \bigcup S \; \forall x \in S \; f(x) \in x$$

Nota: AC $\hookrightarrow$ ogni funzione suriettiva ha un'inversa destra*

* $f : X \to Y$ su $\to \exists g : Y \to X \; \forall y \in Y \; f(g(y)) = y$



Dim $f: X \to Y$ su. $\{x \in X \mid f(x) = y\}$

$$S = \{ f^{-1}(y) \mid y \in Y \}$$

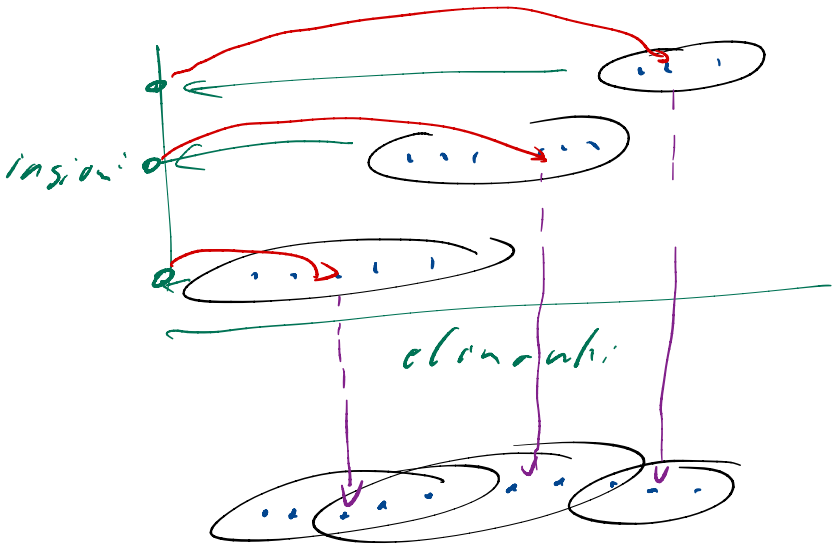
$AC \to \exists h : S \to X$

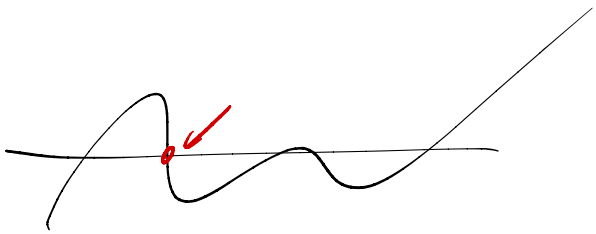
$$A \mapsto h(A) \in A$$

$g : Y \to X$

$$y \mapsto h(f^{-1}(y))$$

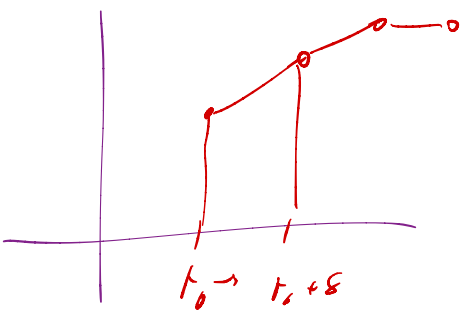
$\exists$ inv. destro $\to AC$ (esercizio / v. notte)





$f'(t) = g(f(t), t)$

$0 = 1$



Buon ordinamento → AC

X ins. di insiemi non vuoti $\rightsquigarrow$ $f : X \to \bigcup X$

$A \mapsto f(A) \in A$

Considero $\prec \subseteq (\bigcup X) \times (\bigcup X)$ buon ord. su $\bigcup X$.

$f(A)$ = il minimo di $A \subseteq \bigcup X$ ☺

AC → Buon ordinamento

Fisso X. $\quad f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$

$A \mapsto f(A) \in A$

$x_0 = f(X) \quad x_1 = f(X \setminus \{x_0\}) \quad x_2 = f(X \setminus \{x_0, x_1\}) \dots$

$x_\omega = f(X \setminus \{x_1, x_2, x_3 \dots\}) \quad x_{n+1} = \dots$

$$x_\alpha = f(X \setminus \{x_n \mid n < \alpha\})$$

$\exists\, f : H(X) \to X$ iniettiva.

—

Usl. $g : \alpha \to X$ su. con $\alpha \in Ord \to X$ è b.o.

$$h : X \to \alpha$$

$$x \longmapsto \min \{n \text{ t.c. } g(n) = x\}$$

$x_1 \prec x_2 \iff_{def.} h(x_1) < h(x_2)$

Lemma di Zorn

Un insieme parzialmente ordinato tale che ogni sottocatena* abbia un maggiorante* ha elementi massimali.*

Sia $(S, <)$ parzialmente ordinato

* sottocatena: $A \subseteq S$ t.c. $<$ ristretta ad A è totale.

* x maggiorante di $A \hookrightarrow \forall y \in A \; y \leq x$ (non necessariamente $x \in A$)

* x el. massimale $\hookrightarrow \neg \exists y \in S \; x < y$.

Zorn → Buon Ordinamento (→ AC)

Cerchiamo una funzione $\alpha \to X$ biunivoca con $\alpha \in Ord$.

$$T = \{\text{funzioni iniettive da un ordinale a } X\}$$
$$= \{f : \alpha \to X \mid \alpha < H(X), \; f \text{ iniettiva}\}$$
$$= \{f \in \mathcal{P}(H(X) \times X) \mid \dots\}$$

$f < g \iff \mathrm{Dom}(f) < \mathrm{Dom}(g)$ e $f = g_{|\mathrm{Dom}(f)}$

($\mathrm{Dom}(f), \mathrm{Dom}(g) \in Ord$)

Verificate le ipot. di Zorn $\Rightarrow \exists f \in T$ massimale.

Sostituiamo che f è suriettiva.

Se no $\exists a \in X \setminus \mathrm{Dom}(f)$ $\quad f' = f \cup \{(\mathrm{Dom}(f), a)\}$

Sia C sottocatena di T. $\bigcup C \in T$ è un maggiorante di C.

$f_1, f_2 \in C \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f_1) \cap \mathrm{Dom}(f_2) \; f_1(x) = f_2(x)$

Dim AC → Zorn

Sia $(S, <)$ ord. parziale t.c. ogni sottocatena ammette un maggiorante e *per assurdo* S non ha elementi massimali.

→ Ogni sottocatena ha un maggiorante *stretto*.

$A \subseteq S$ è una sottocat. $\longrightarrow \exists x \in S \ \forall a \in A \ a < x$.

Fissiamo $f : \mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow S$

$A \longmapsto f(A) \in A$

$F(\alpha) = f(\{\text{maggioranti stretti di } F[\alpha]\})$

$x_1 \neq x_2 \rightarrow x_1 = F(\alpha_1), x_2 = F(\alpha_2)$

- $\alpha_1 < \alpha_2 \quad F(\alpha_1) < F(\alpha_2)$
- $\alpha_2 < \alpha_1 \quad F(\alpha_2) < F(\alpha_1)$

Sia α minimo t.c. $F|_\alpha$ non è crescente.

$\exists \beta < \gamma < \alpha \quad F(\beta) \not< F(\gamma) = f(\{\text{magg. stretti di } \underbrace{F[\gamma]}_{F(\gamma)}\})$

$\Rightarrow F : Ord \to S$ crescente

$F|_{H(S)} : H(S) \to S$ crescente $\rightarrow$ iniettiva.

Sia $\Phi \notin S$

$$F(\alpha) = \begin{cases} f(\{\text{magg. str. di } F[\alpha]\}) & \text{se } F|_\alpha \text{ è } \alpha \to S \text{ cresc.} \\ \Phi & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$G(g) = \begin{cases} f(\{\text{magg. str. di } g[\alpha]\}) & \text{se } g : \alpha \to S \text{ cresc.} \\ \Phi & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\boxtimes$

AC $\to$ Zorn $\to$ Dom ord. $\to$ AC

$\updownarrow$

$|X| = |X \times X|$

---

w_α $\qquad w_0 = w \qquad w_{\alpha+1} = H(w_\alpha) \qquad w_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} w_\alpha$

$$w_w = \bigcup \{ w_n \mid n < w \}$$

$$|w_w| = \aleph_w$$