Esercizio A

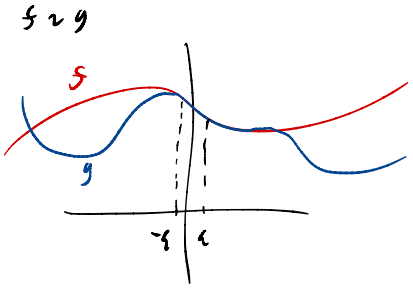
Siano $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diciamo che $f \sim g$ se esiste $\epsilon > 0$ tale che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in [-\epsilon, \epsilon]$. Chiamiamo germi le classi di equivalenza indotte dalla relazione $\sim$. Calcola la cardinalità degli insiemi seguenti.

A.1 – L'insieme dei germi.
A.2 – L'insieme dei germi che hanno un rappresentate continuo.
A.3 – L'insieme delle funzioni biunivoche $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
A.4 – L'insieme dei sottogruppi del gruppo delle funzioni biunivoche $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con l'operazione di composizione.

A 1. $X = \{[f] \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

$[f] = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g \sim f\}$

$|X|$?



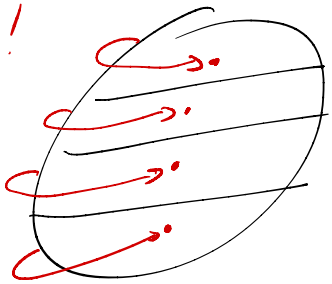
$|X| = c^c = \left(2^{\aleph_0}\right)^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$

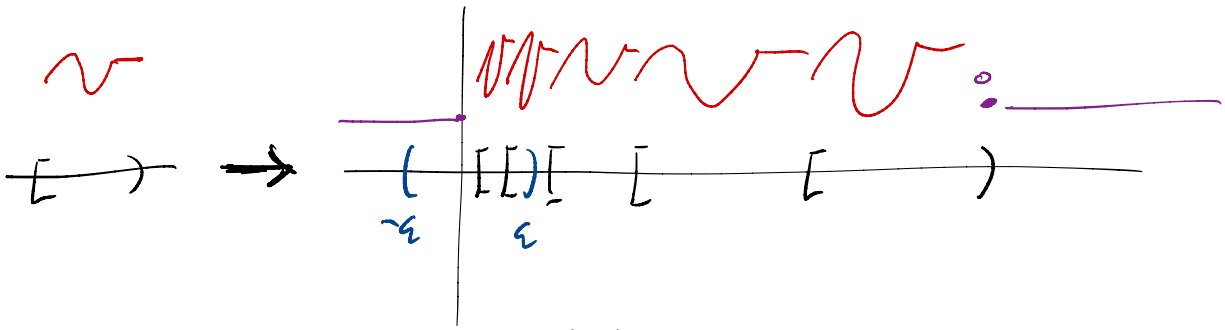
$2^{\aleph_0} \leq \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

$2^{2^{\aleph_0}} = \left|\mathbb{R}^{[0,1[}\right| = c^c$

AC!

$c^c = \left|\mathbb{R}^{[0,1[}\right| \leq |X| \leq c^c$





Definiamo $G : \mathbb{R}^{[0,1[} \to X$

$f \mapsto [f']$

$$f'(x) = \begin{cases} f\left(2^{n+1}\left(x - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right[\text{ per } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dobbiamo dimostrare che $[f'] = [g']$ allora $f = g$.

$f' \sim g'$

$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \quad f' = g'$

Fissiamo questo ε? Fisso n t.c. $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$.

Sia $x \in [0, 1[$ per definizione

$$f(x) = f'\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot x\right) = g'(\dots) = g(x).$$

$0 < \dots \leq \frac{1}{2^n}$

$$f\left(2^{n+1}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} x - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) = f(x)$$

A 2.

$$Y = \{ [f] \mid f \text{ continua } : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$$

$|Y| = 2^{\aleph_0}$

$2^{\aleph_0} \leq |Y| \leq 2^{\aleph_0}$ (AC.)

$\{ [k] \mid k \in \mathbb{R} \} \subseteq Y$

$|\ \ | = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$

$$\left|\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ è biunivoca}\}\right| = 2^{\aleph_0}$$

$$\| \quad X$$

$$X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$$

$$2^{\omega} = \{\text{successioni fino } 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\}$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ...
1 1 0 0 1 1 0 1 1 1 1 ...
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

$$(a_i)_{i \in \omega} \longmapsto f$$

$$f(2n) = \begin{cases} 2n & \text{se } a_n = 0 \\ 2n+1 & \text{se } a_n = 1 \end{cases}$$

$$f(2n+1) = \begin{cases} 2n+1 & \text{se } a_n = 0 \\ 2n & \text{se } a_n = 1 \end{cases}$$

$$\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ biunivoche}\right| = \left|\mathbb{Q}^{\mathbb{R}} \text{ biunivoche}\right|$$

$$\forall r \in \mathbb{R}\ r > 0 \quad \exists f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \text{ t.c. } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = r$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = b$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(g(x))}{x} \cdot \frac{g(x)}{g(x)} = a \cdot b$$

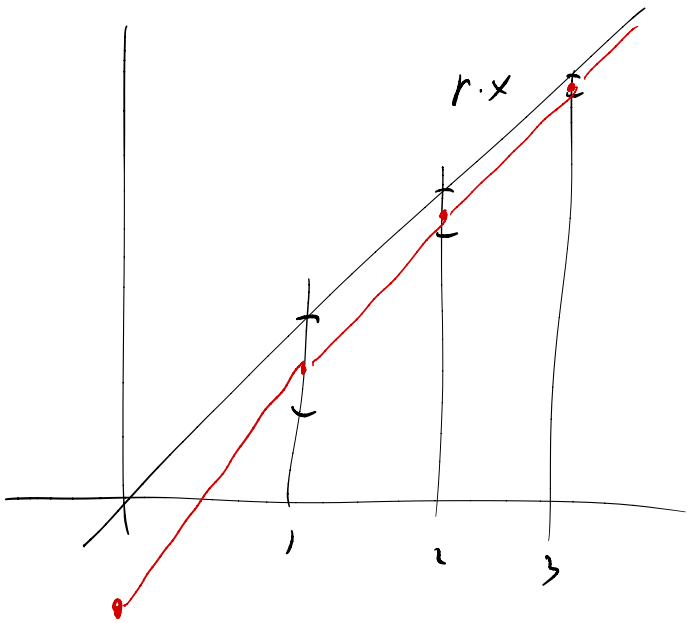
$$\left(\{ f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \mid \exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} > 0 \}, \circ \right) \Big/ \lim f = \lim g$$

$$\simeq (\mathbb{R}^{>0}, \cdot) \simeq (\mathbb{R}, +)$$

Quindi ha $2^{2^{\aleph_0}}$ sottogruppi.

Sia B una base di $\mathbb{R}$ come sp. vett. su $\mathbb{Q}$.

$|B| = 2^{\aleph_0}$. Siccome ho un sottog. per ogni sottoinsieme di B, ho almeno $2^{2^{\aleph_0}}$ sottog.



Esercizio B

Se α e β sono ordinali, diciamo che $\alpha \mid \beta$ se esiste un ordinale γ tale che $\alpha\gamma = \beta$.

B.1 – Calcola $(2 \cdot \omega^2 + \omega \cdot 3 + 7)^3$ in forma normale di Cantor.

B.2 – Quali ordinali α soddisfano $\alpha \mid \omega^2 + \omega \cdot 12$?

B.3 – Dimostra che, dati α e β ordinali, esiste un ordinale γ tale che $\delta \mid \alpha$ e $\delta \mid \beta$ se e solo se $\delta \mid \gamma$.

B.4 – Per quali ordinali α l'insieme $\{\beta : \beta \mid \alpha\} \cup \{0\}$ è un ordinale?

B2 $\quad \alpha \cdot \gamma = \omega^2 + \omega \cdot 12 \qquad \alpha \leq \omega^2 + \omega \cdot 12$

$\alpha = \omega^2 + \omega \cdot a + b \quad$ o $\quad \alpha = \omega \cdot a + b$

① ①

① $(\omega^2 + \omega \cdot a + b) \cdot (\quad) = \omega^2 + \omega \cdot 12$ (1)

$\omega^2 + \omega \cdot a + b = \quad \Rightarrow \alpha = \omega^2 + \omega \cdot 12$

② $a > 0$

$(\omega a + b)(\omega \cdot c + d) = (\omega a + b)\omega c + (\omega a + b) \cdot d$

$d > 0 \rightarrow = \omega^2 c + \omega a d + b$ (ω: 12; 1; 0)

$\alpha = \omega, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \omega \cdot 4, \omega \cdot 6, \omega \cdot 12$

③ $b \cdot (\omega^2 \cdot c + \omega \cdot d + e) = \omega^2 \cdot c + \omega \cdot d + b \cdot e$ ($e = 0$)

$\alpha =$ qualunque numero finito

Dimostra tutti gli $\alpha \in \omega \setminus \{0\}$, e

$\alpha = \omega, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \omega \cdot 4, \omega \cdot 6, \omega \cdot 12, \omega^2 + \omega \cdot 12$

3. Dati $\beta < \alpha$ trovare γ t.c. $(\delta|\alpha \wedge \delta|\beta) \leftrightarrow \delta|\gamma$.

$\alpha_0 = \alpha$

$\alpha_1 = \beta$

α_{n+1} = resto di α_{n-1} / α_n

① $\exists n_0 \in \omega \quad \alpha_{n_0} = 0$ $\quad \{\alpha_n \mid n \in \omega\}$ ha minimo

Per ogni n avrei $\alpha_{n+1} < \alpha_n \ \forall n \in \omega$

② $\forall n \quad \delta|\alpha_{n-1} \wedge \delta|\alpha_n \longleftrightarrow \delta|\alpha_n \wedge \delta|\alpha_{n+1}$

Supponendo $\delta|\alpha_n$, $\delta|\alpha_{n-1} \leftrightarrow \delta|\alpha_{n+1}$

$$\alpha_{n-1} = \alpha_n \cdot \xi + \alpha_{n+1}$$

$\delta \cdot \zeta$

$\delta|\alpha_{n+1} \to \alpha_{n+1} = \delta \cdot \zeta \to \alpha_{n-1} = \delta\zeta + \delta\xi = \delta(\ +\ )$

$\delta|\alpha_{n-1} \to \delta \cdot \xi = \delta \cdot \zeta + \alpha_{n+1} = \delta(\zeta + \nu) + \rho$

$\neq 0$ $\quad \delta \cdot \nu + \rho$ $\quad = 0$

③ $\delta|\alpha \wedge \delta|\beta \longleftrightarrow \delta|\alpha_{n_0-1} \wedge \delta|\alpha_{n_0}$

VERA

N.4 $\{\eta \mid \eta \mid \alpha\}_{\nu<0} \in Ord$

$\Downarrow$

$\forall \beta < \alpha \quad \beta \mid \alpha$

$\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + \dots + \omega^{\alpha_n} \cdot k_n$ in f. normale

se $n \neq 1$ $\omega^{\alpha_1} \cdot k_1 \nmid \alpha$ ma

quindi $\alpha = \omega^{\gamma} \cdot k$

se $k > 2$ $\omega^{\gamma}(k-1) \nmid \omega^{\gamma} k$

$\omega^{\gamma} \cdot (k-1) \cdot 2 > \omega^{\gamma} \cdot k$

$\boxed{\alpha = 2}$

se $k = 2$ e $\gamma > 0$ $\omega^{\gamma} + \omega^{\gamma'} < \omega^{\gamma} \cdot 2$

quindi resta il caso $\alpha = \omega^{\gamma}$

preso $\delta < \alpha$ $\delta = \omega^{\delta_1} k_1 + \dots$ con $\delta_1 < \gamma$

$\exists \gamma' \quad \delta_1 + \gamma' = \gamma$

$(\omega^{\delta_1} k_1 + \dots) \cdot \omega^{\gamma'} = \omega^{\delta_1 + \gamma'} = \omega^{\gamma} = \alpha$

$\boxed{\alpha = \omega^{\gamma}}$