Conseguenze immediate di AC

Prop: Ogni cardinalità infinita è un aleph.

$\forall X \quad \exists \alpha \in Ord \quad |X| = \aleph_\alpha$

Dim X è ben ordinabile e ogni ins. b.o.abile ha come cardinalità un $\aleph$. ☐

Oss. Ogni cardinalità infinita è un aleph $\Longrightarrow$ AC

Dim Siccome $|X| = |\alpha|$ per $\alpha \in Ord$.

$f : \alpha \to X$ b.i. Quindi X è b.o.abile.

Cor Tutte le cardinalità sono confrontabili ☐

$\forall X, Y \quad |X| \leq |Y| \vee |Y| \leq |X|$

Dim Perché gli ordinali iniziali sono confrontabili. ☐

Oss2 Tutte le card. sono confrontabili $\Longrightarrow$ AC

Dim Voglio ben ordinare X. Confronto $|X|$ e $|H(X)|$.

Necessariamente $|X| \leq |H(X)|$, Quindi esiste

$f : X \to H(X) \in Ord$ iniettiva, per cui X è b.o.abile. ☐

Cor. X infinito $\longrightarrow |X| = |X \times X|$

Dim $|X| = \aleph_\alpha$ e $|X \times X| = \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

Def (finito secondo Dedekind)

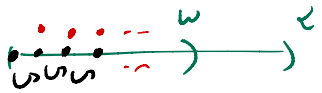
X è finito secondo Dedekind non può essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria

X Dedekind-finito $\overset{def.}{\equiv} \forall Y \in \mathcal{P}(X) \; Y \neq X \; |Y| \neq |X|$

Prop X è finito $\iff$ X è Ordinal-finito

Dim $\Rightarrow$ già fatto.

$\Leftarrow$ $\exists\, \alpha \in Ord$ t.c. $|\alpha| = |X|$



Se $\alpha < \omega$ allora X è finito.

Se $\omega \leq \alpha$ $\quad f : \alpha \to \alpha \setminus \{0\}$

$$\beta \longmapsto \begin{cases} \beta+1 & \text{se } \beta < \omega \\ \beta & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Considero $\quad g : \alpha \to X$ biunivoca

$$b : X \to X \setminus \{g(0)\}$$

$$a \longmapsto g(f(g^{-1}(a)))$$

□

Prop $0 < |X| \leq |Y| \iff \exists\, s : Y \to X$ suriettiva

Dim

($\Rightarrow$) Fisso $f : X \to Y$ iniettiva, fisso $k \in X$.

Definisco $\quad g : Y \to X$

$$a \longmapsto \begin{cases} f^{-1}(a) & \text{se } a \in Im(f) \\ k \end{cases}$$

($\Leftarrow$) Sia $g : Y \to X$ suriettiva, prendo un inversa destra $f : X \to Y$ di g. $\forall x \in X \quad g(f(x)) = x$

f è iniettiva perché se $x \neq y$

$$g(f(x)) = x \neq y = g(f(y))$$

$f(x) \neq f(y)$

□

Abbiamo visto: sapendo che $|S| = \aleph_0$
e $\forall A \in S \quad |A| = \aleph_0$

$\rightarrow$ (se esiste $f : S \to \bigcup S^{\omega}$ famiglia di enumerazioni) allora $|\bigcup S| = \aleph_0$

CON AC
SI ELIMINA QUESTA IPOTESI!

Prop. $|S| \leq \aleph_\alpha$ e $\forall A \in S \; |A| \leq \aleph_\alpha$ allora $|\bigcup S| \leq \aleph_\alpha$

Dim.

Posso assumere $\emptyset \notin S$, $S \neq \emptyset$.

$\forall A \in S \; \exists f : \omega_\alpha \to A$ surgettiva.

Sia g una funzione di scelta per $\mathcal{P}((\bigcup S)^{\omega_\alpha}) \setminus \{\emptyset\}$

$$h : S \to (\bigcup S)^{\omega_\alpha}$$
$$A \longmapsto g(\{f : \omega_\alpha \to A \text{ surgettiva}\})$$

Fisso $i : \omega_\alpha \to S$ surgettiva. Considero

$$e : \omega_\alpha \times \omega_\alpha \longrightarrow \bigcup S$$
$$(\eta, \gamma) \longmapsto h(i(\eta))(\gamma)$$

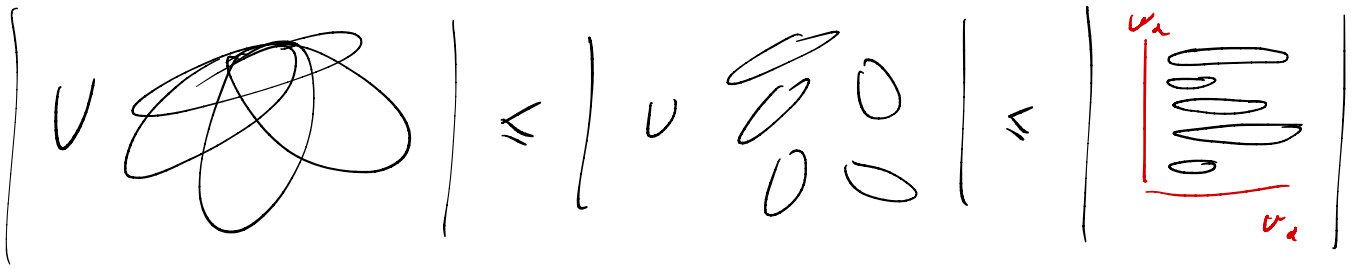
Sostengo che e è surgettiva.

Sia $x \in \bigcup S$, allora $x \in A \in S$ per qualche A.

Allora $A = i(\eta)$ e $x = h(A)(\gamma)$ per qualche $\eta, \gamma < \omega_\alpha$.

Quindi $x = h(i(\eta))(\gamma)$.

Questo conclude perché $|\omega_\alpha \times \omega_\alpha| = \aleph_\alpha$ ∎



Cor Un'unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

Notazione $\mathcal{P}^{=n}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid |A| = n\}$

$\mathcal{P}^{fin}(X) = \bigcup \{\mathcal{P}^{=n}(X) \mid n \in \omega\}$

$= \{A \in \mathcal{P}(X) \mid |A| < \aleph_0\}$

Lemma $\omega \le |X| = \aleph_\alpha \to |\mathcal{P}^{=n}(X)| = \aleph_\alpha$

Dim Per induzione su n.

- $n = 1$ $|\mathcal{P}^{=1}(X)| = |X|$ $\quad X \ni a \longmapsto \{a\} \in \mathcal{P}^{=1}(X)$
- $n+1$ $\quad f : \mathcal{P}^{=n}(X) \times X \to \mathcal{P}(X)$

$A \quad a \longmapsto A \cup \{a\}$

Se $B \in \mathcal{P}^{=n+1}(X)$ allora $B \in \mathrm{Im}(f)$

$$|\mathcal{P}^{=n+1}(X)| \le |\mathrm{Im}(f)| \le \underbrace{|\mathcal{P}^{=n}(X)|}_{\aleph_\alpha} \times \underbrace{|X|}_{\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha$$

Cor $|X| = \aleph_\alpha \to |\mathcal{P}^{fin}(X)| = \aleph_\alpha$

Dim $\mathcal{P}^{fin}(X) = \underbrace{\{\mathcal{P}^{=n}(X) \mid n < \omega\}}_{|\cdot| \le \aleph_0 \le \aleph_\alpha}$

Per la prop. sulle unioni $|\mathcal{P}^{fin}(X)| \le \aleph_\alpha$ ∎

Prop: Un ordine totale $(A, <)$ è buono se e solo se non esiste $\omega \ni i \mapsto a_i \in A$ decrescente $(i < j \to a_j < a_i)$

Dim

($\longrightarrow$) Immediata ($\{a_i \mid i \in \omega\}$ non avrebbe minimo $\lightning$).

($\longleftarrow$) Per assurdo supponiamo che $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$ non abbia un minimo. Sia $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to B$ funzione di scelta, sia $a_0 \in B$. Definiamo per il teo. di ricorsione numerabile

$$a_{i+1} = f(\{b \in B \mid b < a_i\})$$

Avremmo una successione decrescente $\lightning$ ☒

Alcune conseguenze di AC in matematica

Esempio Sia $A \subseteq \mathbb{R}$

$$x \in \bar{A} \iff \exists \{x_i\}_{i \in \omega} \ \forall i \ x_i \in A \ \lim_{i \to +\infty} x_i = x$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$$

Dim

($\Leftarrow$) Immediata (senza AC)

($\Rightarrow$) Sia f una f. di scelta su $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$

allora

$$x_i \overset{\text{def}}{=} f\left( ]x - \frac{1}{i+1}, x + \frac{1}{i+1}[\cap A \right)$$

Facile verifica: $\lim_{i \to +\infty} x_i = x$. ∎

Esercizio: Dimostrare l'esempio senza AC assumendo che A sia aperto.

Alla prossima lezione:

$$\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \forall x,y \ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

ma f non è $x \mapsto k \cdot x$.