Dati V uno spazio vettoriale su F.

- $A \subseteq V$ è lin. indip. se $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall a_1, \dots a_n \in A$

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \text{ con } x_1 \dots x_n \in F \iff x_1 = \dots = x_n = 0$$

- $B \subseteq V$ è una base di V se

$$\forall v \in V\ \exists! n \in \mathbb{N}\ \exists! a_1, \dots a_n \in B\ \exists! x_1 \dots x_n \in F \setminus \{0\}$$

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = v.$$

Prop: Ogni sp. vett. V ha una base.

Oss. Un insieme lin. indip. B massimale rispetto a $\subseteq$ è una base.

↑

$B \subsetneq B' \subseteq V \to B'$ non è lin. indip.

$v \in V$ • se $v \in B$ allora ho finito.

• se $v \notin B$ allora $B \cup \{v\}$ non è lin. indip.

esiste $b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + v x = 0$ tale che non tutti gli x sono nulli. ($x \neq 0$)

$$v = b_1 \cdot \left(\frac{-x_1}{x}\right) + b_2 \left(\frac{-x_2}{x}\right) + \dots$$

unicità: $b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = v = b_1 x_1' + \dots + b_n x_n'$

$$b_1 (x_1 - x_1') + \dots + b_n (x_n - x_n') = 0$$

$= 0$ $\qquad$ $= 0$

□ Oss.

Sia C una catena* per inclusione di insiemi lin. indip. Dobbiamo dimostrare che C ha un maggiorante.

* $\forall A \in C \quad A \subseteq V$ lin. indip.

  $\forall A_1, A_2 \in C \quad A_1 \subseteq A_2$ o $A_2 \subseteq A_1$

* B è maggiorante $\hookrightarrow \forall A \in C \quad A \subseteq B$.

Dimostriamo che $B = \bigcup C$ funziona.

maggiorante: immediato

Verifichiamo che B è lin. indip.

Per assurdo $b_1, \dots b_n \in B \quad x_1, \dots x_n \in F$ non tutti $= 0$

$$(*) \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n = 0$$

$b_1 \in A_1 \in C$, $b_2 \in A_2 \in C$, $\dots$, $b_n \in A_n \in C$ ← Siccome C è una catena $\exists k \in \{1 \dots n\}$ t.c. $\forall i \in n \; A_i \subseteq A_k$

Quindi $(*)$ è una combinazione lineare in A_k ↯

Esempio Esiste una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x, y \quad f(x) + f(y) = f(x+y)$$

e non lineare — non vale $f(x) = k \cdot x$

Idea Vedo $\mathbb{R}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.

Fisso una base B di $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Fisso $b_1 \in B$.

$$f(x) = r_1 \text{ t.c. } x = b_1 r_1 + \dots + b_n r_n \quad \begin{matrix} b_i \in B \\ r_i \in \mathbb{Q} \end{matrix}$$

$x = b_1 r_1 + \dots + b_n r_n \qquad y = b_1 s_1 + \dots + b_n s_n$

$x + y = b_1 (r_1 + s_1) + \dots + b_n (r_n + s_n)$ ☐

Esercizio Sia B una base di $\mathbb{R}$ come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale, determina $|B|$. ← $2^{\aleph_0}$

$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ è una misura σ-additiva su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

se • $\mu(\emptyset) = 0$

• se $\{A_i\}_{i \in \omega}$ è una succ. di insiemi disgiunti

$$\mu\left(\bigcup \{A_i \mid i \in \omega\}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$$

Oss) Una misura μ come sopra è monotona ↑

$A \subseteq B \to \mu(A) \leq \mu(B)$

Rem $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$

Prop. Non esiste una misura σ-additiva su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ che soddisfa $\mu([0,1[) = 1$ e invariante per traslazioni: $\forall A \subseteq \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ \mu(A) = \mu(A + x)$

↑ $\{y \in \mathbb{R} \mid y - x \in A\}$

Dim Piano: trovare $\{A_i\}_{i\in\omega}$ tali che

$[0,1[= \bigcup\{A_i \mid i\in\omega\}$ $\quad \forall i\neq j \; A_i \cap A_j = \emptyset$

e inoltre $\forall i,j \; \mu(A_i) = \mu(A_j) = k$

- se $k=0 \to \mu([0,1[) = \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\mu(A_i)}_{=0} = 0$

  $k>0 \to \mu([0,1[) = \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\mu(A_i)}_{=k} = +\infty$

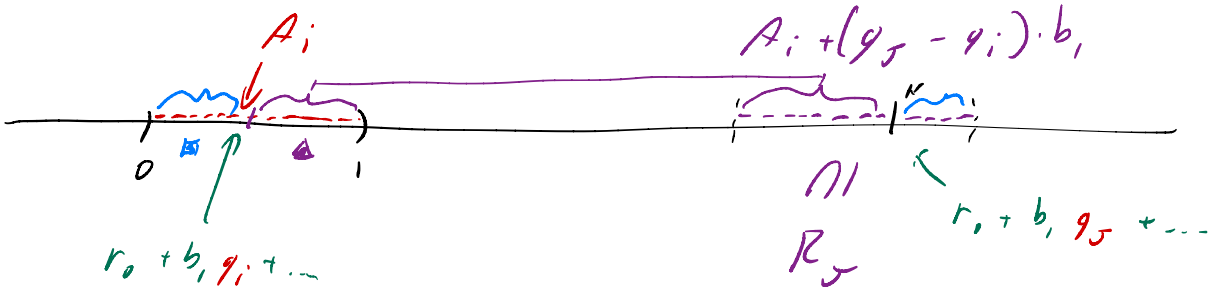
Sia B una base di $\mathbb{R}$ come $\mathbb{Q}$-sp. vett., $1 = b_0 \in B$.
Sia $\{q_i\}_{i\in\omega}$ un'enumerazione di $\mathbb{Q}$.

$R_i \overset{\text{def}}{=} \{x\in\mathbb{R} \mid x = \underbrace{b_0}_{=1}\cdot r_1 + b_1\cdot q_i + b_2\cdot r_2 + \dots + b_n r_n \quad b_i\in B,\ r_i\in\mathbb{Q}\}$

$A_i = [0,1[\cap R_i$ $\qquad \bigcup\{R_i \mid i\in\omega\} = \mathbb{R}$

$\bigcup\{A_i \mid i\in\omega\} = [0,1[\cap \bigcup\{R_i \mid i\in\omega\} = [0,1[\cap\mathbb{R}$

Ci basta dimostrare che $\mu(A_i) \le \mu(A_j)$



$A_j \supseteq \triangle \cup \square$ $\qquad \mu(\triangle) + \mu(\square) = \mu(A_i + \dots)$

$= \mu(A_i)$ ☐

Il teorema di Cantor-Bendixson

Definizione $A \subseteq \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$. Diciamo che x è un **punto di accumulazione** di A se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

$A \subseteq \mathbb{R}$ è **perfetto** se coincide con l'insieme dei suoi punti di accumulazione.

Prop. $A \subseteq \mathbb{R}$ è perfetto e non vuoto, allora $|A| = 2^{\aleph_0}$

Tro (C-B) $C \subseteq \mathbb{R}$ chiuso allora $C = A \cup P$ con $|A| \leq \aleph_0$ e P perfetto.

Cor $C \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso allora $|C| \leq \aleph_0$ o $|C| = 2^{\aleph_0}$

Dim Scriviamo $C = A \cup P$.

Se $P = \emptyset$ allora $|C| = |A| \leq \aleph_0$

Se $P \neq \emptyset$ $2^{\aleph_0} = |P| \leq |C| \leq |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ ∎