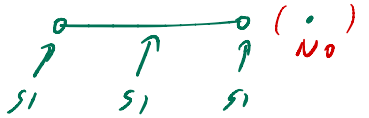
Il teorema di Cantor-Bendixson

Premessa $A \subseteq \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$. Diciamo che x è un **punto di accumulazione** di A se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

$A \subseteq \mathbb{R}$ è **perfetto** se coincide con l'insieme dei suoi punti di accumulazione.

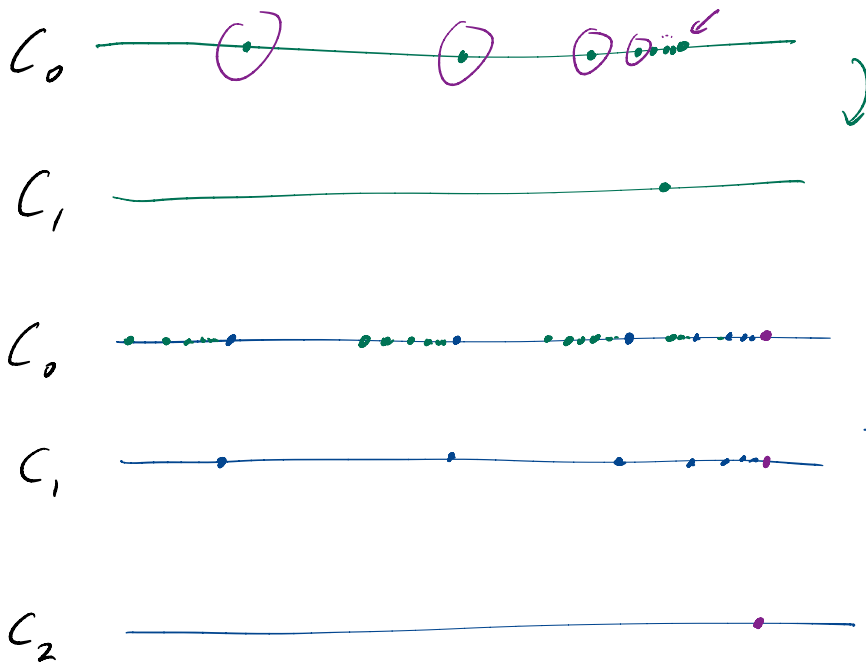


$\updownarrow$

A è chiuso e non ha punti isolati

Th (C-B)

Se $C \subseteq \mathbb{R}$ chiuso $\rightarrow$ $C = A \cup P$ con $|A| \leq \aleph_0$ e P perfetto.



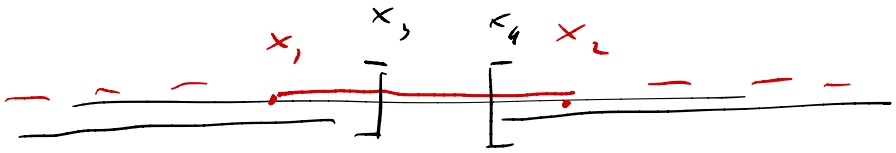
Es. mettere qua $\mathbb{R}$.

Prop: $\emptyset \neq A \subseteq [0,1]$ perfetto $\longrightarrow |A| = 2^{\aleph_0}$

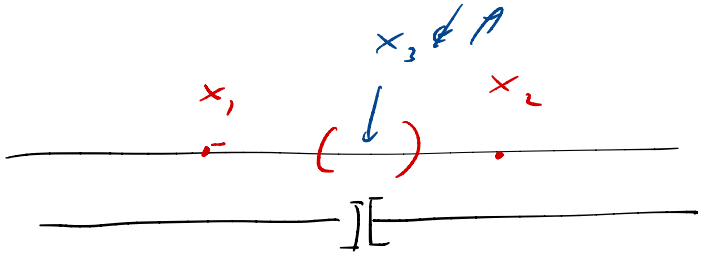
Lemma $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ perfetto $\longrightarrow \exists\, A_1, A_2 \subseteq A$

perfetti, non vuoti, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Dim $x_1, x_2 \in A$ supponiamo $x_1 < x_2$



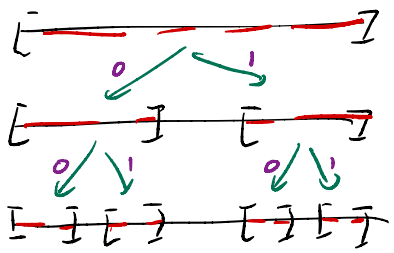
$A \cap]-\infty, x_3]$ $\qquad$ $A \cap [x_4, +\infty[$



$A \cap]-\infty, x_3]$ $\qquad$ $A \cap [x_3, +\infty[$

$\blacksquare$

Dim (prop.)



$P = \{\text{perfetti} \subseteq [0,1]\}$

$$f : P \longrightarrow (P, P) \qquad f_1 \quad f_2$$

$$A \longmapsto (A_1, A_2) \quad \text{come nell'osservaz.}$$

$$\text{seq. finite di } \{0,1\} \longrightarrow P$$
$$\sigma \longmapsto A_\sigma$$

$$A_\emptyset = A \qquad A_{\sigma^\frown 0} = f_1(A_\sigma)$$
$$A_{\sigma^\frown 1} = f_2(A_\sigma)$$

$$\{0,1\}^\omega \longrightarrow \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$$
$$\sigma \longmapsto \bigcap \{A_{\sigma|n} \mid n \in \omega\}$$

$\boxtimes$

<u>Teo</u> (C-B)

Se $C \subseteq \mathbb{R}$ chiuso $\rightarrow$ $C = A \cup P$ con $|A| \leq \aleph_0$ e P perfetto.

<u>Dim</u> Se $X \subseteq \mathbb{R}$

$$X' \overset{\text{def}}{=} \{\text{p.ti di accumulazione di } X\}$$

$$C_0 = C \qquad C_{\alpha+1} = C'_\alpha \qquad C_\lambda = \bigcap \{C_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$$

$$P = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{Ord}} C_\alpha = \{x \in C \mid \forall \alpha \in \mathrm{Ord}\ x \in C_\alpha\}$$

$$A = C \setminus P$$

① P è perfetto.

Per assurdo supponiamo $x \in P$ sia isolato.

- Sia $x = P \cap (a, b)$
- $\forall\, y \in]a, b[\setminus \{x\}$ $\exists\, \alpha_y$ minimo t.c. $y \notin C_{\alpha_y}$
- $\beta = \sup \{ \alpha_y \mid y \in (a, b) \setminus \{x\} \}$
- $x \in C_{\beta+1}$ e non è isolato.

  Se no $x \notin C'_{\beta+1} = C_{\beta+2} \rightarrow x \notin P$
- $C_{\beta+1} \cap (]a, b[\setminus \{x\}) \neq 0 \iff \exists\, y \quad \beta + 1 \leq \alpha_y \rightarrow \leftarrow$

② $|A| \leq \aleph_0$

$x \in A = C \setminus \bigcap C_\alpha$

Sia α minimo t.c. $x \notin C_\alpha$. Osserviamo che α non è limite.

altrimenti $x \notin \bigcap \{ C_\eta \mid \eta < \alpha \}$ quindi $\exists\, \eta < \alpha \quad x \notin C_\eta$.

Sia β_x t.c. $\beta_x + 1$ è il minimo $x \notin C_{\beta_x + 1}$.

Dato $x \in A$ sia $]a_x, b_x[$ un intervallo a estremi razionali che isola x in C_{β_x}

La funzione $A \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$x \longmapsto (a_x, b_x)$ è in.

L'intervallo (a_x, b_x) determina univocamente l'ordinale β_x.

$$(a_x, b_x) \cap C_\alpha = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \alpha \geq \beta_x + 1 \\ \{x\} & \text{se } \alpha = \beta_x \\ \neq \{x\} & \text{se } \alpha < \beta_x \end{cases}$$

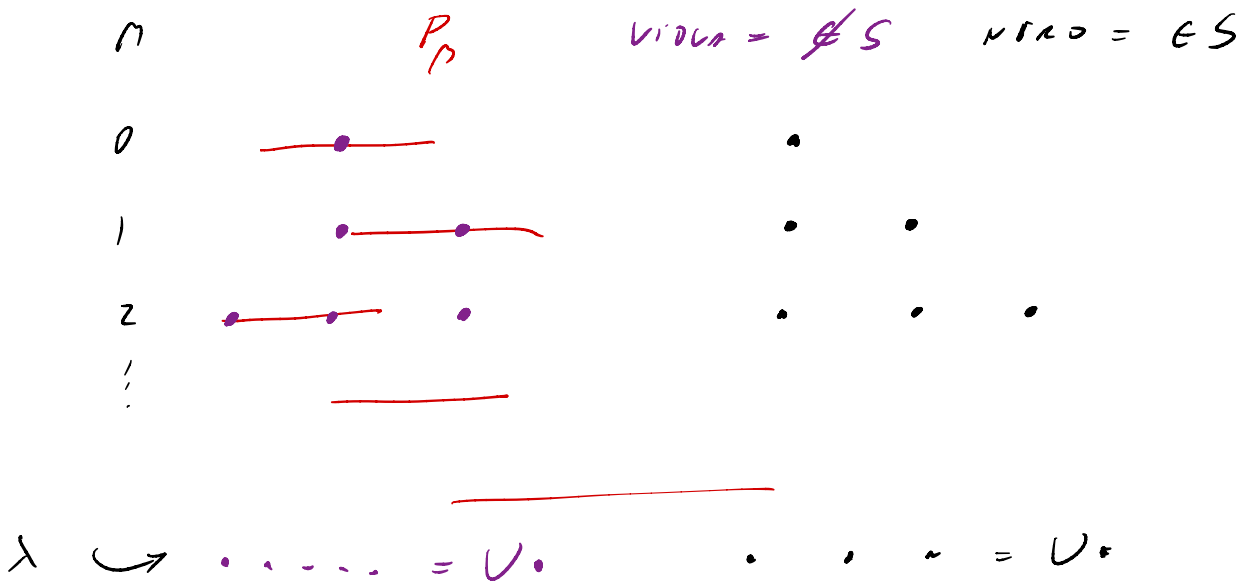
Determinando β_x $\{x\} = (a_x, b_x) \cap C_{\beta_x}$. ☑

Esempio Esiste un insieme $S \subseteq \mathbb{R}$ che non si scrive nella forma $S = A \cup P$ con $|A| \leq \aleph_0$ e P perfetto.

Dim Dimostriamo che esiste S t.c. $|S| = 2^{\aleph_0}$ e S non contiene alcun insieme perfetto non vuoto.

Oss $|\{\text{ins. perfetti non vuoti}\}| = 2^{\aleph_0}$

Sia $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$



$\omega_\alpha \longrightarrow$ ins. perf. non nuoti

$\beta \longmapsto P_\beta$ biunivoca.

f funz. di scelta su $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$

$$g : \omega_\alpha \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$\beta \longmapsto (g_1(\beta), g_2(\beta))$$

$$g_1(\beta) = f(P_\beta \setminus (g_1[\beta] \cup g_2[\beta]))$$

$$g_2(\beta) = f(\mathbb{R} \setminus (g_1[\beta] \cup g_2[\beta] \cup \{g_1(\beta)\}))$$

$$g_1(\lambda) = \bigcup g_1[\lambda] \qquad g_2(\lambda) = \bigcup g_2[\lambda]$$

- $g_2 : \omega_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva
- $g_2[\omega_\alpha]$ non contiene alcun perfetto. $\boxtimes$

Esercizi d'esame che si possono svolgere con la teoria vista fino a questo momento: tutti eccetto 3·VII·2019 – B.2 – 4 e 24·VII·2019 – C.4 (se non mi è sfuggito nulla).