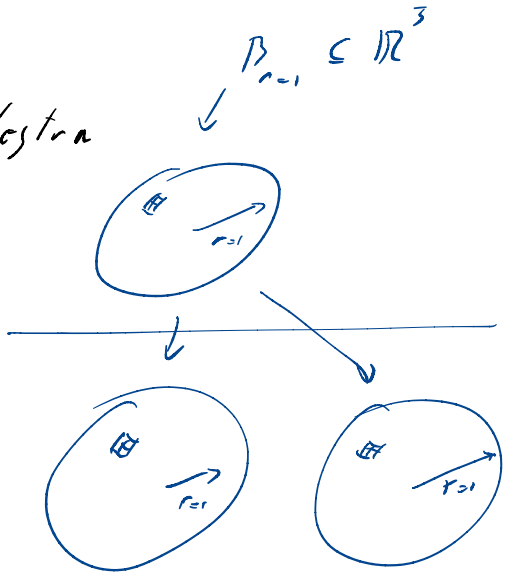
Prop Assumendo gli assiomi di estensionalità, insieme vuoto, separazione, paio, unione, parti, infinito e rimpiazzamento, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- l'assioma della scelta
- ogni funzione surgettiva ha un'inversa destra
- il teorema del buon ordinamento
- il lemma di Zorn
- ogni cardinalità è un aleph
- $\forall X, Y \quad |X| \leq |Y| \vee |Y| \leq |X|$
- $\forall X \quad |X| \geq \aleph_0 \to |X \times X| = |X|$



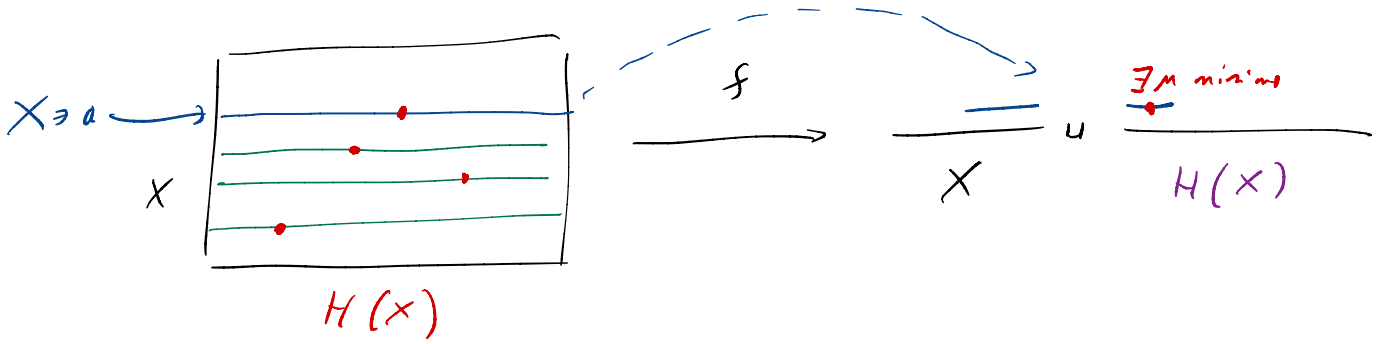
Teo (Tarski) Se $\forall X \quad |X| \geq \aleph_0 \to |X \times X| = |X|$
Allora vale AC.

Dim. Dato un insieme X buon ordiniamo X.
Applichiamo l'ipotesi a $X \sqcup H(X)$!

$$|X \times H(X)| \leq |(X \sqcup H(X)) \times (X \sqcup H(X))| = |X \sqcup H(X)|$$

$$|X| \cdot |H(X)| \leq (|X| \cdot |H(X)|)^2$$

Esiste $f : X \times H(X) \to X \sqcup H(X)$ iniettiva.



Dato $a \in X$ consideriamo $f_a : H(X) \to X \sqcup H(X)$

$$b \mapsto f(a,b)$$

$\mathrm{Im}(f_a) \not\subseteq X \Rightarrow \forall a \ \exists b \ f_a(b) \in H(X)$

Considero $g : X \longrightarrow H(X)$

$$a \longmapsto \min \{ f_a(b) \mid f_a(b) \in H(X) \}$$

Se, per assurdo g non fosse iniettiva, prendo $a \neq a'$

$$g(a) = f_a(\text{qualche } b) = f(a, \text{qualche } b)$$

$\neq$ f è in.

$$g(a') = f_{a'}(\text{———}) = f(a', \text{———}) \qquad \blacksquare$$

Aritmetica cardinale

Notazione k è un cardinale $\overset{\text{def.}}{\equiv}$ k è un ord. iniziale.

Possiamo usare gli ordinali iniziali come rappresentanti delle cardinalità. Se $k = \omega_\alpha$ $\lambda = \omega_\beta$ $\mu = \omega_\gamma$

$k = \lambda + \mu \overset{\text{def.}}{\equiv} \aleph_\alpha = \aleph_\beta + \aleph_\gamma$ idem con $\lambda \cdot \mu$, λ^μ

Se $|X| = |\aleph_\alpha|$ e $k = \omega_\alpha$ scriviamo $|X| = k$

Def (somma e prodotto infiniti di cardinali)

Sia I e $\{k_i\}_{i\in I}$ famiglia di cardinali

$$\sum_{i\in I} k_i = \left| \bigcup \{ k_i \times \{i\} \mid i \in I \} \right|$$

$\bigcup$ unione disgiunta dei k_i

$$\prod_{i\in I} k_i = \left| \{ f : I \to \sup_{i\in I} k_i \mid \forall i \in I \ f(i) \in k_i \} \right|$$

Not. Siano $\{X_i\}_{i\in I}$ insiemi disgiunti allora

$$\left| \bigcup \{X_i \mid i \in I\} \right| = \sum_{i\in I} |X_i|$$

Dim Sia $k_i = |X_i|$ Fissiamo $f_i : k_i \to X_i$ bigettiva.

$$f : \bigcup \{ k_i \times \{i\} \mid i \in I \} \to \bigcup \{ X_i \mid i \in I \}$$

$$(\alpha, i) \longmapsto f_i(\alpha)$$

è biunivoca. ∎

Nota. Siano $\{X_i\}_{i\in I}$ insiemi

$$\left| \{ f : I \to \bigcup \{X_i \mid i \in I\} \mid \forall i \in I \ f(i) \in X_i \} \right| = \prod_{i\in I} |X_i|$$

Oss. Siano $\{X_i\}_{i\in I}$ insiemi allora

$$\left| \bigcup \{X_i \mid i \in I\} \right| \leq \sum_{i\in I} |X_i|$$

Dim Come la precedente.

Oss.

$$k^{\sum_{i\in I}\lambda_i} = \prod_{i\in I} k^{\lambda_i}$$

Dim Un elemento di $k^{\bigcup\{\lambda_i\times\{i\}\ldots\}}$ è una funzione

$$f: \bigcup\{\lambda_i\times\{i\} \mid \ldots\} \to k$$

Un elemento di $\{g: I \to \ldots \mid \forall i\in I\ g(i)\in k^{\lambda_i}\}$ è una funzione

$$g: I \longrightarrow (\lambda_i \longrightarrow k)$$

$$g(i) = (\alpha \longmapsto f(\alpha, i))$$

$$f(\alpha, i) = g(i)(\alpha)$$

$\blacksquare$

Esercizio Valgono le proprietà ragionevoli, per esempio

- Se $\forall i\in I\ k_i \le \lambda_i$

$$\sum_{i\in I} k_i \le \sum_{i\in I}\lambda_i \qquad \prod_{i\in I} k_i \le \prod_{i\in I}\lambda_i$$

- $\forall i\in I\ k_i \le \sum_{i\in I} k_i$

$$\underbrace{k_i \ni x \longmapsto f \qquad f(j) = \begin{cases} x & \text{se } j=i \\ 0 & \text{se } j\neq i\end{cases}}_{\forall i\in I\ k_i \le \prod_{i\in I} k_i}$$

- Se $\forall i\in I\ k_i \neq 0$

$$|I| \le \sum_{i\in I} k_i$$

- Se $I = I_1 \sqcup I_2$

$$\sum_{i\in I} k_i = \Big(\sum_{i\in I_1} k_i\Big) + \Big(\sum_{i\in I_2} k_i\Big) \qquad \prod_{i\in I} k_i = \Big(\prod_{i\in I_1} k_i\Big)\cdot\Big(\prod_{i\in I_2} k_i\Big)$$

- $\sum_{i\in k}\lambda = k\cdot\lambda \qquad \prod_{i\in k}\lambda = \lambda^k$

- $\Big(\prod_{i\in I} k_i\Big)^{\lambda} = \prod_{i\in I} k_i^{\lambda}$

$$f(\underset{\lambda}{x}, \underset{I}{y}) = g(\underset{I}{y}, \underset{\lambda}{x})$$

Prop Supponiamo $\forall i \quad k_i \neq 0$

$$\sum_{i \in I} k_i = |I| \cdot \sup_{i \in I} k_i = \max\left(|I|, \sup_{i \in I} k_i\right)$$

Dim $\leq$

$$\sum_{i \in J} k_i \leq \sum_{i \in I} k \overset{\text{def. } \sup_{i \in I} k_i}{=} |I| \cdot k$$

$\geq$ · $\sum_{i \in J} k_i \geq |I|$ per l'esercizio

· $\sum_{i \in I} k_i \geq \sup\{k_i \mid i \in I\}$

$\Uparrow$

$\forall J \quad \sum_{i \in J} k_i \geq k_J$ per l'esercizio ∎

Teo (König) Se $\forall i \in I \quad k_i < \lambda_i$ allora

$$\sum_{i \in I} k_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$$

Cor $k_i = 1 \qquad \lambda_i = 2$

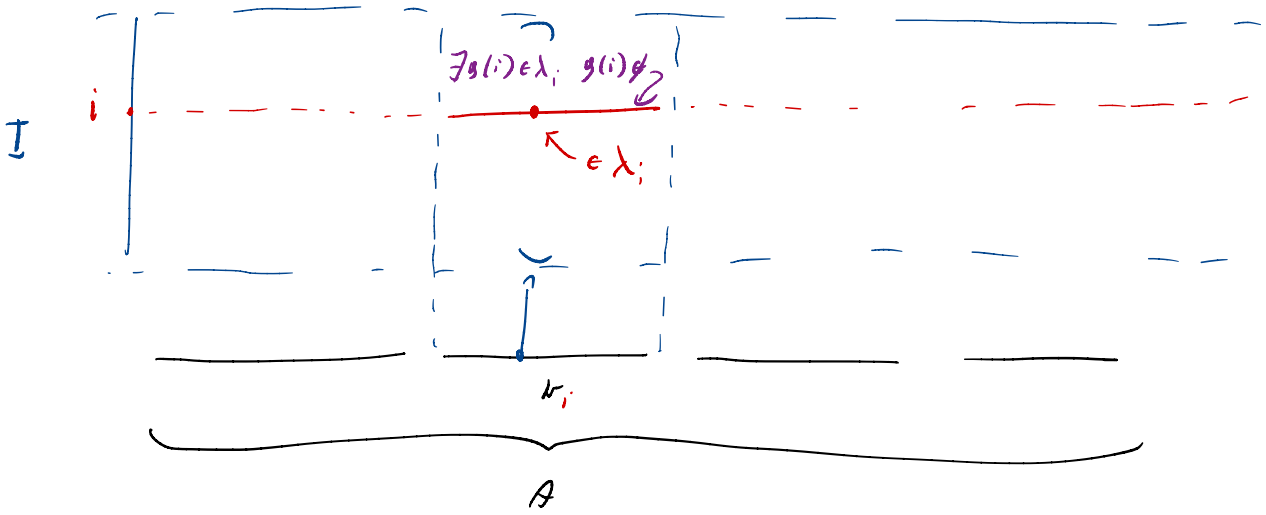
$$\aleph_\alpha = |\omega_\alpha| = \sum_{i \in \omega_\alpha} 1 < \prod_{i \in \omega_\alpha} 2 = |2|^{|\omega_\alpha|} = 2^{\aleph_\alpha}$$

Th $\quad \kappa_i < \lambda_i \longrightarrow \sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$

$A = \bigcup \{ \kappa_i \times \{i\} \mid i \in I \}$ $\qquad \sum_{i\in I} \kappa_i = |A|$

$B = \{ f : I \to \dots \mid \forall i \in I \ f(i) \in \lambda_i \}$ $\qquad \prod_{i\in I} \lambda_i = |B|$

Ci basta dire che data $f : A \to B$, f non è su.



Definiamo $\quad f_i : \kappa_i \longrightarrow \lambda_i$

$\alpha \longmapsto f(\alpha, i)(i)$

Osserviamo che $\forall i$ f_i non è su. $\Rightarrow \lambda_i \setminus \mathrm{Im}(f_i) \neq \emptyset$

$g : I \to \sup \{ \lambda_i \mid i \in I \}$

$i \longmapsto g(i) \in \lambda_i \setminus \mathrm{Im}(f_i)$.

Dico che $g \notin \mathrm{Im}(f)$.

Per assurdo sia $g = f(\alpha, i)$ consideriamo

$g(i) = f(\alpha, i)(i) = f_i(\alpha) \in \mathrm{Im}(f_i)$ ↯ ∎

Esempio $\aleph_\omega < \aleph_\omega^{\aleph_0}$ $= \aleph'_\omega$

$= \max(\aleph_0, \sup_{\alpha<\omega} \omega_\alpha)$

$$\aleph_\omega = \sum_{\alpha<\omega} \aleph_\alpha < \prod_{\alpha<\omega} \aleph_{\alpha+1} \leq \prod_{\alpha<\omega} \aleph_\omega = \aleph_\omega^{\aleph_0}$$

Esercizio (facile) Se $2^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha+1}$ allora $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha+1}$

Esercizio (difficile) Se $2^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha+1}$ allora $\aleph_{\alpha+2}^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha+2}$

Esercizio (pura orgia) Se $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ allora $\aleph_{n+1}^{\aleph_0} = \aleph_{n+1}$ per $n \in \omega$.

$$\prod_{i\in I} X_i = \{ f : I \to \bigcup_j X_j \mid \forall i \; f(i) \in X_i \}$$

S insieme di insiemi non vuoti

$\prod_{X\in S} X \ni f \iff f$ è funzione di scelta.

$f : \{X_i \mid i \in I\} \to \bigcup \{X_i \mid i \in I\}$ di scelta

$g : I \to \bigcup \ldots$

$i \mapsto f(X_i)$