Def. Un cardinale κ è:

- **regolare** se $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$
- **singolare** se $\mathrm{cof}(\kappa) < \kappa$
- **successore** se $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$ per qualche ordinale α
- **limite** se $\kappa = \aleph_\lambda$ con λ ordinale limite

Prop. κ succ. $\to$ κ regolare

Dim Per assurdo $\lambda = \mathrm{cof}(\kappa) < \kappa = \aleph_{\alpha+1}$

$$\kappa = \sum_{i\in\lambda} \kappa_i \leq \sum_{i\in\lambda} \aleph_\alpha = \lambda \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \quad \text{↯}$$

($\kappa_i < \kappa$)

Prop. Se λ è un ordinale limite $\mathrm{cof}(\aleph_\lambda) = \mathrm{cof}(\lambda)$

Dim Si osserva $S = \{\omega_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ è cofinale in ω_λ

quindi $\mathrm{cof}(\omega_\lambda) = \mathrm{cof}(S) = \mathrm{cof}(\lambda)$

$S \simeq \lambda$ ↯

Def Se $\kappa = \aleph_\alpha$ scriviamo $\kappa^+ \stackrel{\text{def}}{=} \aleph_{\alpha+1}$

Prop. (Formula di Hausdorff)

Siano κ, λ card. infiniti:

$$(\kappa^+)^\lambda = \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$$

Dim

(≥) $(\kappa^+)^\lambda \geq \kappa^\lambda$

$(\kappa^\kappa)^\lambda \geq \kappa^+$

(≤) $(\kappa^+)^\lambda \le \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$

Se $\kappa < \lambda$ $\quad \kappa^\lambda = \kappa^{\lambda\cdot\lambda} = (\kappa^\lambda)^\lambda \ge (2^\kappa)^\lambda \ge (\kappa^+)^\lambda$

Se $\kappa \ge \lambda$ $\quad S_\alpha = \{ f : \lambda \to \alpha \}$ $\quad |S_\alpha| = |\alpha|^\lambda$

α ord. qualunque

$|S_{\kappa^+}| = (\kappa^+)^\lambda$

Sia $f \in S_{\kappa^+}$, $|Im(f)| \le |Dom(f)| = \lambda < \kappa^+ = cof(\kappa^+)$

Quindi $Im(f)$ non è cofinale in κ^+.

— $\exists \alpha < \kappa^+ \quad Im(f) \subseteq \alpha$

$$S_{\kappa^+} = \bigcup \{ S_\alpha \mid \alpha < \kappa^+ \}$$

$\alpha < \kappa^+ \to |\alpha| \le \kappa$

$$(\kappa^+)^\lambda = |S_{\kappa^+}| \le \sum_{\alpha<\kappa^+} |S_\alpha| \le \sum_{\alpha<\kappa^+} \alpha^\lambda \le \sum_{\alpha<\kappa^+} \kappa^\lambda = \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$$

∎

Usiamo

- κ infinito $\to$ $\kappa < cof(2^\kappa) \le 2^\kappa$
- $\aleph_n < \aleph_\omega^{cof(\aleph_n)} = \aleph_\omega^{cof(\omega)} = \aleph_\omega^{\aleph_0}$
- Supponiamo $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$, $\aleph_{\omega_2}^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}^{\aleph_0} \cdot \aleph_{\omega_2}$

$(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$

$= \aleph_{\omega_1} \cdot \aleph_{\omega_2} = \aleph_{\omega_2}$.

Esercizio Dimostrare che $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \beth(\aleph_1) \cdot \beth(\aleph_\omega)$.

L'assioma di fondazione

Domanda Esistono:

$\{\{\{\{\dots\}\}\}\}$ $\quad x = \{x\}$ $\quad y = \{z\}, z = \{y\}$

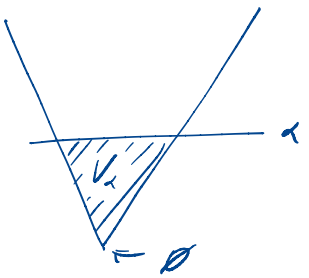
$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$ $\quad x \ni x \ni x \ni \dots$ $\quad y \ni z \ni y \ni z \ni \dots$

Def (Gerarchia di Von Neumann)

$V_0 = \emptyset$

$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$

$V_\lambda = \bigcup \{ V_\alpha \mid \alpha \in \lambda \}$



Definiamo la classe V_* come l'unione di tutti i V_α

$x \in V_* \overset{\text{def.}}{\equiv} \exists \alpha \in Ord \; x \in V_\alpha$

Lemma $\forall \alpha \in Ord$ V_α è transitivo $\leftarrow \forall x \in V_\alpha \; x \subseteq V_\alpha$

Lemma $\forall \alpha, \beta \in Ord \quad \alpha \in \beta \rightarrow V_\alpha \subseteq V_\beta$

Lemma $\forall \alpha \in Ord \quad \alpha \subseteq V_\alpha \rightarrow \alpha \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$

Dim (primo lemma) Per induzione transfinita

- $V_0 = \emptyset$ è transitivo
- caso $\alpha+1$:

$x \in V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha) \Rightarrow x \subseteq V_\alpha \Rightarrow \forall y \in x \; y \in V_\alpha$ ($y \in \mathcal{P}(V_\alpha)$)

$\Leftrightarrow \forall y \in x \; y \in V_{\alpha+1} \Rightarrow x \subseteq V_{\alpha+1}$

• caso λ limite.

$x \in V_\lambda \iff x \in V_\alpha$ con $\alpha < \lambda$

$\Rightarrow x \subseteq V_\alpha$ con $\alpha < \lambda \iff x \subseteq V_\lambda$ □

$\forall x \in V_* \; \forall y \in x \; y \in V_*$

Con V_* è una classe transitiva

Def Relativizzare una formula insiemistica alla classe V_* significa rimpiazzare ogni quantificatore esistenziale $\exists x$ con $\exists x \in V_*$ e ogni quantificatore universale $\forall x$ con $\forall x \in V_*$.

Teo Gli assiomi della teoria degli insiemi relativizzati a V_* restano validi.

Dim (alcuni casi)

① Vuoto $\exists x \; \forall y \; y \notin x \rightsquigarrow \exists x \in V_* \; \forall y \in V_* \; y \notin x$

Osserviamo che $\emptyset \in V_1 = \mathcal{P}(V_0) = \mathcal{P}(\emptyset)$ quindi posso prendere $x = \emptyset$.

② Paio: $\forall a, b \in V_* \; \exists B \in V_* \; \forall x \in V_* \; x \in B \leftrightarrow (x = a \vee x = b)$

Supponiamo $a \in V_\alpha$ $b \in V_\beta$, senza perdita di gen. assumo $\alpha \leq \beta$. $a, b \in V_\beta$ $\{a, b\} \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta+1}$

Quindi $B = \{a, b\} \in V_{\beta+1} \subseteq V_*$.

③ Rimpiazzamento: Fissata $F : V_* \to V_*$ f. classe

$\forall X \in V_* \quad F[X] \in V_*$

Fissiamo X, per ogni $a \in X$ sia α_a minimo t.c. $F(a) \in V_{\alpha_a}$ Consideriamo $\beta = \sup\{\alpha_a \mid a \in X\}$

Siccome $\forall a \in X \ \alpha_a \leq \beta$, $\forall a \in X \ F(a) \in V_{\alpha_a} \subseteq V_\beta$

Quindi $F[X] \subseteq V_\beta$. Quindi $F[X] \in V_{\beta+1}$ ☐

Oss. Dato $x \in V_\lambda$ esiste il minimo α t.c. $x \in V_\alpha$, e α è necessariamente successore.

Perché

$$x \in V_\lambda \to x \in \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$$

$$\to x \in V_\alpha \text{ per qualche } \alpha < \lambda$$

Def $\operatorname{rank}(x) + 1 = \alpha$ con α m/a. t.c. $x \in V_\alpha$

$$x \in V_\alpha \longleftrightarrow \operatorname{rank}(x) < \alpha$$

Lemma Se $x \in y \in V_\kappa$ allora $\operatorname{rank}(x) < \operatorname{rank}(y)$

Dim

$$y \in V_{\operatorname{rank}(y)+1} = \mathcal{P}(V_{\operatorname{rank}(y)}) \Rightarrow y \subseteq V_{\operatorname{rank}(y)}$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{rank}(x) < \operatorname{rank}(y) \Leftarrow x \in V_{\operatorname{rank}(y)}$$

Def Una classe C è <u>buon fondata</u> se per ogni insieme S di elementi di C, S contiene un x <u>$\in$-minimale</u> ossia un x t.c. $x \cap S = \emptyset$.

$\subseteq \nexists y \in S \ y \in x$.

Prop La classe C è ben fondata se e solo se non esiste una successione $\{x_i\}_{i\in\omega}$ di elementi di C t.c. $\forall i\in\omega\ x_{i+1}\in x_i$ $\quad (x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots)$

Dim Se $\{x_i\}_{i\in\omega}$ è una successione come sopra, allora $S=\{x_i \mid i\in\omega\}$ non ha un elemento $\in$-minimale.
Se C non è ben fondata, fissiamo $S\neq\emptyset$ che non ha un elemento $\in$-minimale. Fissiamo $f:\mathcal{P}(S)\to S$ di scelta. Fissiamo $\bar{x}\in S$.

$$x_0=\bar{x} \qquad x_{i+1}=f(\{y\in S \mid y\in x_i\})$$

□

Prop V_α è ben fondata.

Dim Dato S insieme di el. di V_α. Consideriamo $x\in S$ di rango minimo. Se ci fosse $y\in S$ $y\neq x$ allora $\mathrm{rank}(y)<\mathrm{rank}(y)$ ↯ □

Teo Se gli assiomi della t. degli ins. sono coerenti, allora non dimostrano l'esistenza di una catena infinita per appartenenza.

(10) Assioma di buona fondazione $\quad \forall S\ \exists x\in S\ x\cap S=\emptyset$

La classe V di tutti gli insiemi è ben fondata.

Teo (principio di $\in$-induzione) Se una classe C soddisfa

$$\forall S\ (\forall x\in S\ x\in C)\to S\in C$$

allora $C=V$ ossia $\forall S\ S\in C$.

Dim Per assurdo sia $S \notin C$.

$$S' = \{ x \in \underbrace{tc(\{S\})}_{\uparrow} \mid x \notin C \}$$

Lezione 20: il più piccolo ins. transitivo che contiene S

Sia $x \in S'$ $\in$-minimale. $\forall y \in x \; y \in tc(\{S\})$

$\downarrow$

$\forall y \in x \; y \notin S'$

$\forall y \in x \; y \in C \to x \in C$ ↯ □

Prop $\forall x \; x \in V_x$. $V = V_x$

Dim Basta dim. che se $\forall x \in S \; x \in V_x$ allora $S \in V_x$.

$$\alpha = \sup \{ rank(x) + 1 \mid x \in S \}$$

$\forall x \in S \; x \in V_{rank(x)+1} \subseteq V_\alpha$ quindi $S \subseteq V_\alpha$

$\Rightarrow S \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$. □

Esercizi

- Definiamo $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$, $\beth_\lambda = \sup\{\beth_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ con λ limite. Dimostrare che $\forall \alpha \in Ord \; |V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$
- Dimostrare che $rank(x) = \sup\{rank(y)+1 \mid y \in x\}$
- Dimostrare che V_ω soddisfa tutti gli assiomi <u>eccetto</u> l'assioma dell'infinito
- Dimostrare che $V_{\omega+\omega}$ soddisfa tutti gli assiomi <u>eccetto</u> l'assioma del rimpiazzamento
- Dimostrare che l'esistenza dell'ordinale $\omega+\omega$ non segue dagli assiomi della teoria degli insiemi <u>escluso</u> il rimpiazzamento, a patto che questi non si contraddicano.
- Dimostrare che, se κ è inaccessibile, allora tutti gli assiomi della teoria degli insiemi valgono in V_κ.
- Dimostrare che, se la teoria degli insiemi è coerente, allora non dimostra l'esistenza di un cardinale inaccessibile.