Esercizio Dimostrare che $\aleph_\omega^{\aleph_1} = 2^{(\aleph_1)} \cdot 2^{(\aleph_\omega)}$

$2^{\cos(\aleph_1)} = 2^{\aleph_1}$ $\quad$ $2^{\cos(\aleph_\omega) = \cos(\omega)} = 2^{\aleph_0}$

Dobbiamo dim. $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \aleph_1^{\aleph_1} \cdot \aleph_\omega^{\aleph_0}$

(≥) $\left.\begin{aligned} \aleph_\omega^{\aleph_1} &\geq \aleph_1^{\aleph_1} \\ \aleph_\omega^{\aleph_1} &\geq \aleph_\omega^{\aleph_0} \end{aligned}\right\}$ per monotonia

$\aleph_0^{\aleph_1} \geq \aleph_1^{\aleph_1}$

$\aleph_0^{\aleph_1 \cdot \aleph_1} = \left(\aleph_0^{\aleph_1}\right)^{\aleph_1} \leq \aleph_1^{\aleph_1}$

$\aleph_\omega^{\aleph_1} \geq \max\left(\aleph_1^{\aleph_1}, \aleph_\omega^{\aleph_0}\right) = \aleph_1^{\aleph_1} \cdot \aleph_\omega^{\aleph_0}$

(≤) $\aleph_\omega = \sup\{\aleph_n \mid n \in \omega\} = \sum_{n \in \omega} \aleph_n$

$\aleph_\omega^{\aleph_1} = \left(\sum_{n \in \omega} \aleph_n\right)^{\aleph_1} \leq \left(\prod_{n \in \omega} \aleph_n\right)^{\aleph_1} = \prod_{n \in \omega} \aleph_n^{\aleph_1} = (*)$

(2) $\leq$

$(\kappa^\lambda)^\lambda = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\lambda \iff \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_n} = \aleph_\alpha^{\aleph_n} \cdot \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_n}$

$\aleph_{n+1}^{\aleph_1} = \aleph_n^{\aleph_1} \cdot \aleph_{n+1}^{\aleph_1}$

(1) $\rightsquigarrow$ $n \in \omega \to \aleph_n^{\aleph_1} = \aleph_0^{\aleph_1} \cdot \aleph_1^{\aleph_1} \cdot \aleph_2^{\aleph_1} \cdots \aleph_n^{\aleph_1} = \aleph_0^{\aleph_1} \cdot \aleph_n^{\aleph_1}$

$(*) \quad \prod_{n \in \omega} \aleph_n^{\aleph_1} = \prod_{n \in \omega} \aleph_0^{\aleph_1} \cdot \aleph_n^{\aleph_1} = \underbrace{\left(\aleph_0^{\aleph_1}\right)^{\aleph_0}}_{\aleph_0^{\aleph_1}} \cdot \underbrace{\prod_{n \in \omega} \aleph_n}_{\leq \prod_{n \in \omega} \aleph_\omega = \aleph_\omega^{\aleph_0}}$

$\leq \aleph_0^{\aleph_1} \cdot \aleph_\omega^{\aleph_0} \leq \aleph_1^{\aleph_1} \cdot \aleph_\omega^{\aleph_0}$

① Dobbiamo dim. $n \in \omega$ $\quad \aleph_n^{\aleph_1} = \aleph_0^{\aleph_1} \cdot \aleph_n$

Per induzione su n

- caso $n=0$: $\quad \aleph_0^{\aleph_1} = \aleph_0^{\aleph_1} \cdot \aleph_0$
- passo induttivo:

$$\aleph_{n+1}^{\aleph_1} \underset{\text{Hausdorff}}{=} \aleph_n^{\aleph_1} \cdot \aleph_{n+1} \underset{\text{Ip. induttiva}}{=} \left(\aleph_0^{\aleph_1} \cdot \aleph_n\right) \cdot \aleph_{n+1} =$$

$$= \aleph_0^{\aleph_1} \cdot \left(\aleph_n \cdot \aleph_{n+1}\right) = \aleph_0^{\aleph_1} \cdot \aleph_{n+1}$$

② <u>Lemma</u> Se i cardinali $\{\kappa_i\}_{i \in I}$ sono infiniti allora

$$\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \prod_{i \in I} \kappa_i$$

<u>Dim</u>

$$\prod_{i \in I} \kappa_i = \prod_{i \in I} \kappa_i + 1 = \left|\{f : I \to \dots \mid \forall i \in I \ f(i) \in \kappa_i \cup \{\Phi\}\}\right|$$

$$F : \bigsqcup \kappa_i \longrightarrow \{f : \dots\}$$

$$\kappa_i \ni a \longmapsto (\Phi \dots \Phi \ \underset{i}{a} \ \Phi \dots)$$

$$(a, i) \longmapsto f(j) = \begin{cases} \Phi & \text{se } j \neq i \\ a & \text{se } j = i \end{cases}$$

$$\aleph_\omega = \sum_{i \in \omega} \aleph_i < \prod_{i \in \omega} \aleph_{i+1} \leq \prod_{i \in \omega} \aleph_i \overset{\text{esercizio}}{=} \aleph_\omega^{\aleph_0}$$

Es. $\prod_{i\in\omega} \aleph_i = \aleph_\omega^{\aleph_0}$

(≤) $\prod_{i\in\omega} \aleph_i \leq \prod_{i\in\omega} \aleph_\omega = \aleph_\omega^{\aleph_0}$

(≥) Fisso $f : \omega\times\omega \to \omega$ biiezione

$$\prod_{i\in\omega} \aleph_i = \prod_{(a,b)\in\omega\times\omega} \aleph'_{f(a,b)} = \prod_{a\in\omega} \underbrace{\prod_{b\in\omega} \aleph'_{f(a,b)}}_{\geq \aleph'_\omega} \geq \aleph_\omega^{\aleph_0}$$

(≠) $\prod_{b\in\omega} \aleph_{f(a,b)} \geq \sup\{\aleph_{f(a,b)} \mid b\in\omega\} = \aleph_\omega$

Esercizi

(A) Dimostrare che $V_{\omega+\omega}$ soddisfa tutti gli assiomi eccetto l'assioma del rimpiazzamento

(B) Dimostrare che l'esistenza dell'ordinale $\omega+\omega$ non segue dagli assiomi della teoria degli insiemi escluso il rimpiazzamento, a patto che questi non si contraddicano.

Sol (A) ... (B) $\omega+\omega \notin V_{\omega+\omega}$

A (6) $A\in V_{\omega+\omega} \to A\in V_\alpha$ per qualche $\alpha<\omega+\omega$

$\to \mathcal{P}(A)\in V_{\alpha+2}$ e $\alpha+2<\omega+\omega$

Quindi in $V_{\omega+\omega}$ vale l'ass. delle parti

controlli simili per gli altri assiomi.

Il ragionamento NON funziona per il rimpiazzamento.

Controesempio $F : \underline{\omega} \to \omega+\omega$

$\underline{\alpha} \mapsto \omega+\alpha \in V_{\omega+\alpha+1} \subseteq V_{\omega+\omega}$

B $\overset{D.1}{\forall \alpha \in Ord \ \alpha \in V_{\alpha+1}}$ $\overset{D.2}{\forall \alpha \in Ord \ \alpha \notin V_\alpha}$

D.1 Ind. transfinita

- $\emptyset \in V_1 = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- passo successore:

$$\alpha \in V_{\alpha+1} \to \alpha+1 = \underset{\subseteq V_\alpha}{\alpha} \cup \underset{\subseteq V_\alpha}{\{\alpha\}} \subseteq V_{\alpha+1} \to \alpha+1 \in \mathcal{P}(V_{\alpha+1}) = V_{\alpha+2}$$

- passo limite: $\lambda \in \mathcal{P}(V_\lambda) = V_{\lambda+1}$

$$\lambda \subseteq V_\lambda \Leftarrow \forall \alpha \in \lambda \ \alpha \in V_\lambda \Leftarrow \forall \alpha < \lambda \ \alpha \in V_\lambda$$

$$\Uparrow$$

$$\alpha < \lambda \Rightarrow \alpha \in V_{\alpha+1} \subseteq V_\lambda$$

D.2 Per ind. transfinita

- $\emptyset \in V_0 = \emptyset$
- caso succ.: per assurdo assumo $\alpha+1 \in V_{\alpha+1}$

$$\alpha+1 \in V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha) \Rightarrow \underset{\alpha}{\underset{\Psi}{\alpha+1}} \subseteq V_\alpha \Rightarrow \alpha \in V_\alpha$$

ip. induttiva

• caso limite, assumiamo per assurdo $\lambda \in V_\lambda$

$\lambda \in V_\lambda = \bigcup \{ V_\alpha \mid \alpha < \lambda \} \Rightarrow \lambda \in V_\alpha$ per qualche $\alpha < \lambda$

↓ transitività di V_α

$\Rightarrow \lambda \in V_\alpha \Rightarrow \alpha \in V_\alpha$ ↯

λ
α

Abbiamo dimostrato che

$$\alpha \in V_\beta \iff \alpha < \beta$$

ESERCIZIO A 20.II.2020

Siano X un insieme, $X^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle successioni di elementi di X, e

$$\text{shift}\colon X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$$
$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$$

Sia infine $\sim$ la relazione di equivalenza fra elementi di $X^{\mathbb{N}}$

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, m, n \in \mathbb{N}\ \text{shift}^m(a) = \text{shift}^n(b)$$

dove con shift^x si intende l'iterata x-esima di shift.

A.1 – Se $X = \mathbb{N}$, quali valori può assumere la cardinalità di una classe di equivalenza della relazione $\sim$?

A.2 – Se $X = \mathbb{N}$, quante sono le classi di equivalenza di $\sim$?

A.3 – Dimostra che, per ogni X infinito, esiste una funzione $\text{shift}^{0.5}\colon X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ tale che $\text{shift} = \text{shift}^{0.5} \circ \text{shift}^{0.5}$.

A.4 – Per quali X infiniti esistono funzioni $\text{shift}^q\colon X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$, per ogni razionale positivo q, tali che $\text{shift} = \text{shift}^1$ e $\text{shift}^a \circ \text{shift}^b = \text{shift}^{a+b}$ per ogni a, b?

$\text{shift}(3, 1, 4, 1, 5, \ldots) = 1, 4, 1, 5, \ldots$

$a \sim b \overset{\text{def.}}{\iff} \exists\, m, n \in \mathbb{N}\ \text{shift}^m(a) = \text{shift}^n(b)$

$\iff \exists\, m, n \in \mathbb{N}\ \forall i \in \mathbb{N}\ \ a_{m+i} = b_{n+i}$

A1. Data una successione $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ quanti può valerne

$$|\{b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid a \sim b\}| = \aleph_0$$

$\stackrel{\text{def.}}{=} |[a]|$

(≥) Considero le successioni b^i con $i \in \mathbb{N}$

$$b^i_j = \begin{cases} a_j & \text{se } j > 0 \\ i & \text{se } j = 0 \end{cases}$$

"prendo a e cambio il primo elemento"

$$shift(a) = shift(b^i) \to a \sim b.$$

(≤) Definisco

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega} \to [a] \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$
$$m \quad n \quad a \mapsto (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

$$b_i = \begin{cases} a_i & i < n \\ a_{m+i-n} & i \geq n \end{cases}$$

questa è suriettiva.

a =	0	1	2	3	4	5
$2, 0, \emptyset$ →	2	3	4	5	6	7
$0, 2, (7, 9)$ →	7	9	0	1	2	3 ..
$3, 2, (7, 9)$ →	7	9	3	4	5	6

$$|\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega}| = \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \sum_{k \in \omega} \overbrace{\aleph_0^{k}}^{\aleph_0} = \aleph_0 .$$

$$\uparrow$$

$$\bigcup_{k \in \omega} \mathbb{N}^{k}$$

<u>A.2</u> $$|\underbrace{\{[a] \mid a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}}_{S}| = 2^{\aleph_0}$$

$$2^{\aleph_0} = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\bigcup_{x \in S} x| \leq \sum_{x \in S} \overset{\aleph_0}{|x|} = |S| \cdot \aleph_0$$

$$\rightarrow |S| = 2^{\aleph_0}$$