Esercizio A

20.II.2020

Siano X un insieme, $X^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle successioni di elementi di X, e

$$\text{shift}\colon X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$$
$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$$

Sia infine $\sim$ la relazione di equivalenza fra elementi di $X^{\mathbb{N}}$

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, m, n \in \mathbb{N} \ \text{shift}^m(a) = \text{shift}^n(b)$$

dove con shift^x si intende l'iterata x-esima di shift.

A.1 – Se $X = \mathbb{N}$, quali valori può assumere la cardinalità di una classe di equivalenza della relazione $\sim$?

A.2 – Se $X = \mathbb{N}$, quante sono le classi di equivalenza di $\sim$?

A.3 – Dimostra che, per ogni X infinito, esiste una funzione $\text{shift}^{0.5}\colon X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ tale che $\text{shift} = \text{shift}^{0.5} \circ \text{shift}^{0.5}$.

A.4 – Per quali X infiniti esistono funzioni $\text{shift}^q\colon X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$, per ogni razionale positivo q, tali che $\text{shift} = \text{shift}^1$ e $\text{shift}^a \circ \text{shift}^b = \text{shift}^{a+b}$ per ogni a, b?

A.3 $\quad shift : X^{\mathbb{N}} \longrightarrow X^{\mathbb{N}}$

$a_0, a_1, a_2, \ldots \longmapsto (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \quad b_i = a_{i+1}$

$3, 1, 4, 1 \ldots \longmapsto 1, 4, 1, \ldots$

Stiamo cercando $shift^{0.5} : X^{\mathbb{N}} \longrightarrow X^{\mathbb{N}}$

tale che $shift(x) = shift^{0.5}(shift^{0.5}(x))$

Caso particolare $X = Y \times Y$

$shift^{0.5}$

$(a_0\ b_0), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots \longmapsto (b_0, a_1), (b_1, a_2), (b_2, a_3), \ldots$

$shift^{0.5} \circ shift^{0.5} = shift$ ✓

$(a_0\ b_0), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots \longmapsto (a_0\ b_0), (a_1, b_1), \ldots$

È un fatto generale che $|X| = |X \times X|$

Esiste una bigezione $f : X \to X \times X$

Definisco $\overline{\text{shift}}^{0.5} : (X \times X)^{\mathbb{N}} \to (X \times X)^{\mathbb{N}}$

$$\text{shift}^{0.5} : X^{\mathbb{N}} \longrightarrow X^{\mathbb{N}}$$

$$X^{\mathbb{N}} \ni (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \longmapsto (f(a_i))_{i \in \mathbb{N}} \longmapsto \overline{\text{shift}}^{0.5}(f(a_i))_{i \in \mathbb{N}} = (b_i)_{i \in \mathbb{N}} \in (X \times X)^{\mathbb{N}}$$

$$\downarrow$$

$$\text{shift}^{0.5}(a_i) \overset{\text{def}}{=} (f^{-1}(b_i))_{i \in \mathbb{N}}$$

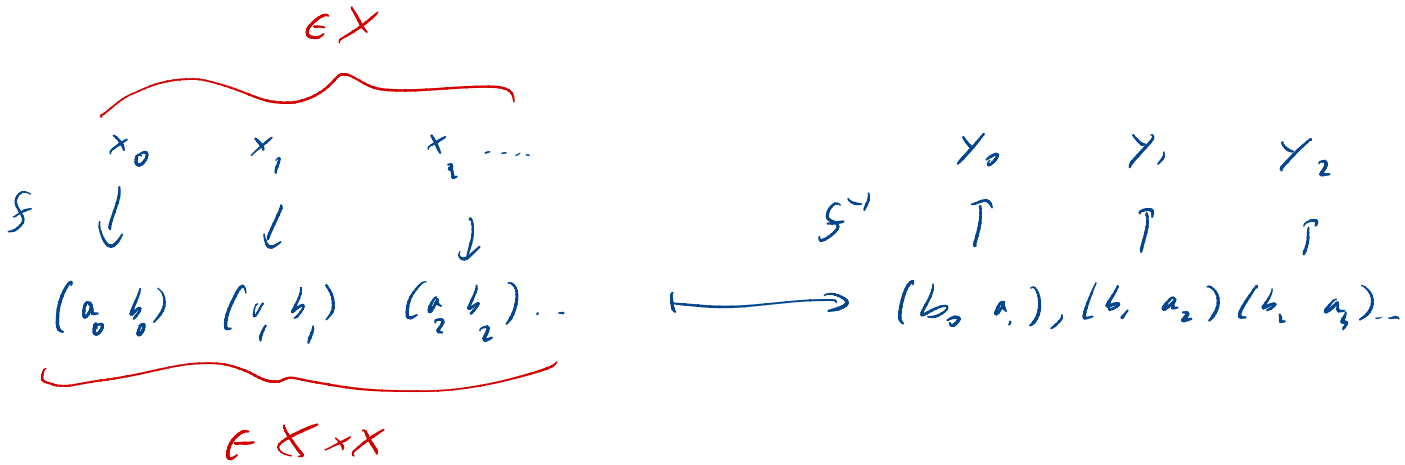
$$\overbrace{\begin{array}{ccccc} x_0 & x_1 & x_2 & \dots \\ \downarrow f & \downarrow & \downarrow & \end{array}}^{\in X}$$

$$\underbrace{(a_0\ b_0)\quad (a_1\ b_1)\quad (a_2\ b_2)\ \dots}_{\in X \times X} \longmapsto \begin{array}{ccc} y_0 & y_1 & y_2 \\ \uparrow f^{-1} & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

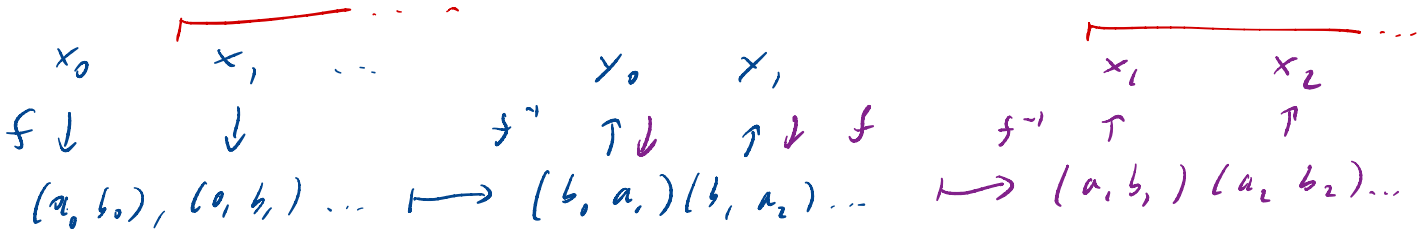
$$(b_0\ a_1),\ (b_1\ a_2)\ (b_2\ a_3)\dots$$

Se la faccio due volte

$$\begin{array}{ccccccccc} x_0 & x_1 & \dots & & y_0 & y_1 & & x_1 & x_2 \\ f \downarrow & \downarrow & & f^{-1} & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow\ f & f^{-1} & \uparrow & \uparrow \end{array}$$



$$(a_0\ b_0),\ (a_1\ b_1)\ \dots \longmapsto (b_0\ a_1)(b_1\ a_2)\dots \longmapsto (a_1\ b_1)\ (a_2\ b_2)\dots$$

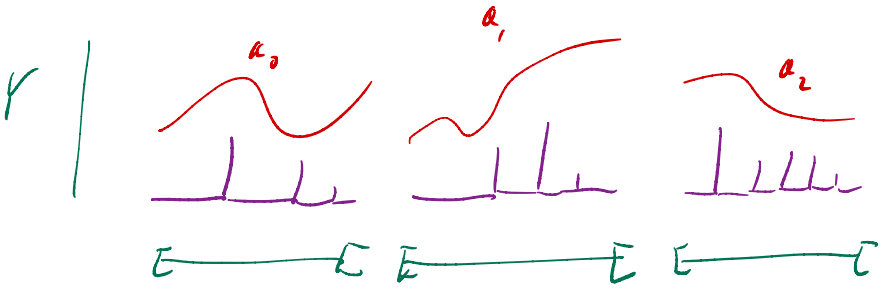


A.4.

Se $X = Y^{[0,1[}$ allora è facile definire shift^q

$$\left(Y^{[0,1[}\right)^{\mathbb{N}} \ni (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \longmapsto f \in Y^{[0,+\infty[}$$

$$f(x) = a_{\lfloor x \rfloor}\left(x - \lfloor x \rfloor\right)$$



$$\text{Shift}^q : Y^{[0,+\infty[} \longrightarrow Y^{[0,+\infty[}$$

$$f \longmapsto g$$

$$g(x) = f(x+q)$$

$$\text{shift}^q(\text{shift}^r(f)) = g = \text{shift}^{q+r}(f)$$

$$g(x) = f(x+q+r)$$

Idea: definisco

$$Y^{\mathbb{R}^{\geq 0}}_{l.f.} = \{ f \in Y^{\mathbb{R}^{\geq 0}} \mid \forall r \in \mathbb{Q} \ |\{s<r \mid f(s) \neq 0\}| < \aleph_0 \}$$

Faccio il ragionamento sopra, e osservo che

$$|\{ f \in Y^{[0,1]_{\mathbb{R}}} \mid |\mathrm{supp}(f)| < \aleph_0 \}| = |Y|$$

$\wr$

$$|\mathcal{O}^{\text{fin}}([0,1]_{\mathbb{R}} \times Y)| = |[0,1]_{\mathbb{R}} \to Y| = |Y|$$

Esercizio A

Sia X un insieme di cardinalità $\aleph_\alpha$.
Calcola la cardinalità degli insiemi seguenti.

A.1 – L'insieme delle relazioni di equivalenza su X.
A.2 – L'insieme dei buoni ordinamenti su X.
A.3 – L'insieme delle classi di isomorfismo di buoni ordinamenti su X.
A.4 – L'insieme delle operazioni associative $X \times X \to X$.

A1 $|X| = \aleph_\alpha$

$Y = \{ R \mid R \text{ è una r. di eq. su } X \}$

$Y \subseteq \mathcal{P}(X \times X) \qquad |Y| \leq 2^{\aleph_\alpha}$

Vogliamo dimostrare: $2^{\aleph_\alpha} \leq |Y|$

Tentativo (non funziona ma quasi)



$$\mathcal{P}(X) \to Y$$

$$A \mapsto R_A$$

$$R_A(x,y) \equiv (x \in A \wedge y \in A) \vee (x \notin A \wedge y \notin A)$$

Fisso $\clubsuit \in X$ $\quad |X \setminus \{\clubsuit\}| = |X|$ $\quad |\mathcal{P}(\dots)| = 2^{\aleph_\alpha}$

$$\mathcal{P}(X \setminus \{\clubsuit\}) \longrightarrow Y$$

$$A \longmapsto R_A$$

$$R_A(\alpha,\beta) \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \alpha \in A \wedge \beta \in A \\ \alpha \notin A \wedge \beta \notin A \\ \alpha = \clubsuit \wedge \beta \in A \\ \alpha \in A \wedge \beta = \clubsuit \end{cases}$$

$$A = \{x \in X \mid R_A(x, \clubsuit)\}$$

A.2

$$BO(X) = \{R \mid R \text{ è un b.o. stretto su } X\}$$

$$BO(X) \subseteq \mathcal{P}(X \times X) \qquad |BO| \leq 2^{\aleph_\alpha}$$

Fisso $\clubsuit \in X$ e trovo g iniettiva

$$g: \mathcal{P}(X \setminus \{\clubsuit\}) \to BO(X)$$

$$A \longmapsto R_A$$

Per ogni $A \subseteq X \setminus \{\clubsuit\}$ scelgo $<_A$ b.o. su A

$$R_A(\alpha,\beta) \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \alpha \in A \wedge \beta \in A \wedge \alpha <_A \beta \\ \alpha \in A \wedge \beta \notin A \\ \alpha = \clubsuit \wedge \beta \in \underline{X \setminus \{\clubsuit\} \setminus A} \\ \alpha \in D \wedge \beta \in D \wedge \alpha <_D \beta \end{cases} =: B$$

$$A = \{ \alpha \in X \mid R_\alpha(\alpha, \Phi) \}$$



A.3 Due b.o. sono isomorfi sse gli ordinali corrispondenti sono isomorfi

$$|\{\text{cl. di iso di b.o. su } X\}| = |\{\alpha \in Ord \mid |\beta| = |X|\}|$$

($\omega_{\alpha+1}$, $\aleph_\alpha$)

$$\aleph_{\alpha+1} = |\{\beta \in Ord \mid \omega_\alpha \leq \beta < \omega_{\alpha+1}\}|$$

Lemma Se $A \subseteq X$, $|X| \geq \aleph_0$, $|A| < |X|$
allora $|X \setminus A| = |X|$

$$|\{\beta \in Ord \mid \omega_\alpha \leq \beta < \omega_{\alpha+1}\}| = |\omega_{\alpha+1} \setminus \omega_\alpha| = |\omega_{\alpha+1}| = \aleph_{\alpha+1}$$

A.4 $O_p(X) = \{$ op. associativa su $X\}$

$$O_p(X) \subseteq \mathcal{P}((X \times X) \times X) \qquad |O_p(X)| \leq 2^{\aleph_\alpha}$$

$2^{\aleph_0} \leq |O_p(X)|$: ordini su $X \longrightarrow O_p(X)$

$\prec \longmapsto \min_\prec$ definito da

$$\min_\prec(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } x \prec y \\ y & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$x \prec y \iff x = \min(x, y) \wedge x \neq y$$

Esercizio B

Se α e β sono ordinali, definiamo la somma di Hessenberg $\alpha \oplus \beta$ come il minimo ordinale maggiore di tutti gli ordinali della forma $\alpha' \oplus \beta$ e $\alpha \oplus \beta'$ con $\alpha' < \alpha$ e $\beta' < \beta$.

B.1 – Dimostra che la somma di Hessenberg è commutativa.
B.2 – Supponendo $n \in \mathbb{N}$, calcola $\omega \oplus n$.
B.3 – Dimostra che la somma di Hessenberg è associativa.
B.4 – Calcola $(\omega + 2) \oplus (\omega + 3)$.

$\omega \cdot 2 + 5$; $\omega \cdot 2$; 5

$(\omega \oplus 2) \oplus (\omega \oplus 3) = (\omega \oplus \omega) \oplus (2 \oplus 3)$

B.1 Se $\alpha = \beta$ non c'è niente da dimostrare.

Dimostriamo che $\alpha < \beta \to \alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$, per induzione su β. Fisso β

Ip. induttiva $\forall \gamma < \beta \quad \forall \alpha < \gamma \to \alpha \oplus \gamma = \gamma \oplus \alpha$

Devo dimostrare $\alpha < \beta \to \alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$

Procedo per induzione su α. Fisso α

Ip. induttiva. $\forall \delta < \alpha \quad \delta \oplus \beta = \beta \oplus \delta$

$$\alpha \oplus \beta = \sup \{ (\alpha' \oplus \beta) + 1 , (\alpha \oplus \beta') + 1 \mid \alpha' < \alpha , \beta' < \beta \}$$

$$= \sup \{ (\beta \oplus \alpha') + 1 , (\beta' \oplus \alpha) + 1 \mid \alpha' < \alpha , \beta' < \beta \}$$

$$= \beta \oplus \alpha .$$

B.2 $0 \oplus 0 = 0 \leftarrow$ min. ord. $>$ di tutti gli ordinali di $\emptyset$

$0 \oplus 1 > 0 \oplus 0 = 0 \to 0 \oplus 1 = 1$

$0 \oplus 2 > 0 \oplus 0 = 0$
$0 \oplus 1 = 1 \to 0 \oplus 2 = 2$

$0 \oplus (n+1) > 0 \oplus n = n$
$0 \oplus n = n \to 0 \oplus (n+1) = n+1$

$0 \oplus n = n$ per ogni

$1 \oplus 1 > 0 \oplus 1 = 1$

$1 \oplus 0 = 1$ $\qquad$ $1 \oplus 1 = 2$

ipotesi: $m \oplus n = m + n$ per $m, n < \omega$

dim: facile induzione

$\omega \oplus n > m \oplus n$ per $m < \omega$ (numero finito)

$\omega + n = \omega \oplus n > \omega \oplus n-1 = \omega + (n-1)$

$> \omega \oplus n-2 = \omega + (n-2)$

$\vdots \qquad \vdots$

$> \omega \oplus 0 = \omega$

Manca controllare

$\omega \oplus 0 > 0 \oplus 0 = 0$

$\omega > 1 \oplus 0 = 1$

$> 2 \oplus 0 = 2$

$\vdots \qquad \vdots$

$\omega \oplus n = \omega + n$

Lemma $m, n < \omega \longrightarrow m \oplus n$ è finito.

Dim $m \oplus n$ è il min $>$ di $m' \oplus n$, $m \oplus n'$ con $m' < m$ o $n' < n$. ma questi sono in numero finito.

Procedendo per induzione su $m+n$, ciascuno di questi è finito, quindi $m \oplus n$ è finito.