Esercizio B

Se α e β sono ordinali, definiamo la somma di Hessenberg $\alpha \oplus \beta$ come il minimo ordinale maggiore di tutti gli ordinali della forma $\alpha' \oplus \beta$ e $\alpha \oplus \beta'$ con $\alpha' < \alpha$ e $\beta' < \beta$.

B.1 – Dimostra che la somma di Hessenberg è commutativa.
B.2 – Supponendo $n \in \mathbb{N}$, calcola $\omega \oplus n$.
B.3 – Dimostra che la somma di Hessenberg è associativa.
B.4 – Calcola $(\omega + 2) \oplus (\omega + 3)$.

B.1 (col minimo anziché per induzione)

Supponiamo per assurdo che $\exists \alpha, \beta \quad \alpha \oplus \beta \neq \beta \oplus \alpha$.

Consideriamo α_0 minimo t.c. $\exists \beta \quad \alpha_0 \oplus \beta \neq \beta \oplus \alpha_0$

Consideriamo β_0 minimo t.c. $\alpha_0 \oplus \beta_0 \neq \beta_0 \oplus \alpha_0$

$\alpha_0 \oplus \beta_0$ = il minimo ord. $>$ di $\alpha' \oplus \beta_0$ e $\alpha_0 \oplus \beta'$ con $\alpha' < \alpha_0$ e $\beta' < \beta_0$

Osserviamo che $\alpha' \oplus \beta_0 = \beta_0 \oplus \alpha'$ per la minimalità di α_0

$\alpha_0 \oplus \beta' = \beta' \oplus \alpha_0$ per la minimalità di β_0

Quindi

$\alpha_0 \oplus \beta_0$ = il minimo ord. $>$ di ~~$\alpha' \oplus \beta_0$~~ $\beta_0 \oplus \alpha'$ e ~~$\alpha_0 \oplus \beta'$~~ $\beta' \oplus \alpha_0$ con $\alpha' < \alpha_0$ e $\beta' < \beta_0$

$= \beta_0 \oplus \alpha_0$ ↯

20 · 11 · 2020

Esercizio C

Determina condizioni necessarie e sufficienti sugli ordinali α e β affiché:

C.1 – $\alpha + \beta$ sia un ordinale limite,

C.2 – $\alpha \cdot \beta$ sia un ordinale limite,

C.3 – α^β sia un ordinale limite.

ordinale → successore $\gamma+1$

→ limite $\neq 0$ né $\gamma+1$

→ zero

C.1 α è limite e $\beta = 0$ o β è limite.

- se $\beta = \gamma + 1$ allora $\alpha + \beta = \alpha + (\gamma+1) = (\alpha+\gamma)+1$ succ.
- se $\beta = 0$ allora $\alpha + \beta = \alpha$ limite sse α è lim.
- se β è limite consideriamo $\gamma < \alpha + \beta$, allora

se $\gamma \leq \alpha$ $\quad \gamma+1 \leq \alpha+1 < \alpha+\beta$ perché $\omega \leq \beta$

se $\alpha < \gamma$ $\quad$ scriviamo $\gamma = \alpha + \delta$; abbiamo $\alpha < \alpha+\delta < \alpha+\beta$

quindi $\delta < \beta$ quindi $\delta+1 < \beta$ perché

β è limite

$$\gamma+1 = (\alpha+\delta)+1 = \alpha+(\delta+1) < \alpha+\beta$$

C.2 $\alpha, \beta \neq 0$ e uno fra loro è limite.

Supponiamo $\alpha, \beta \neq 0$, altrimenti ovviamente $\alpha \cdot \beta = 0$.
Se sono entrambi successori $\alpha = \gamma + 1$ $\beta = \delta + 1$

$$\alpha\beta = (\gamma+1)(\delta+1) = (\gamma+1)\cdot\delta + (\gamma+1)\cdot 1$$

$$= \left((\gamma+1)\cdot\delta + \gamma\right) + 1 \quad \text{successore.}$$

Supponiamo α limite e $\beta = \delta + 1$ successore

$$\alpha\beta = \alpha(\delta+1) = \alpha\delta + \alpha \quad \text{limite per C.1}$$

Rimane il caso β limite
Supponiamo $\gamma < \alpha\beta$ scriviamo $\gamma = \alpha \cdot \nu + \rho$
con $\rho < \alpha$ (divisione euclidea). Osserviamo
che $\nu < \beta$ perché se $\nu \geq \beta$ $\alpha\cdot\nu + \rho \geq \alpha\cdot\nu \geq \alpha\beta$ ⇒
Quindi

$$\gamma + 1 \leq \alpha\cdot\nu + \underbrace{\rho + 1}_{\leq \alpha} \leq \alpha\cdot\nu + \alpha = \alpha\cdot\underbrace{(\nu+1)}_{< \beta} < \alpha\cdot\beta$$

perché β è limite

C.3 $\alpha > 1$, $\beta > 0$, α è limite o $\beta \geq \omega$

I casi $\alpha \leq 1$ o $\beta = 0$ si verificano immediatamente.

Supponiamo $\alpha = \gamma + 1$ e $\beta < \omega$. Dimostriamo per induzione su β che α^β è successore

- caso $\beta = 1$ $\quad \alpha^\beta = \alpha = \gamma + 1$ succ
- caso $\beta = n+1$ $\quad \alpha^\beta = \alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha = \underline{\alpha^n} \cdot (\gamma + 1)$

succ. ip. induttiva

e $\alpha^n \cdot (\gamma + 1)$ è succ. per C.2

Dimostriamo che α^ω è limite. Sia $\gamma < \alpha^\omega$ allora $\gamma < \alpha^n$ per qualche $n < \omega$ — perché $\alpha^\omega = \sup\{\alpha^n \mid n < \omega\}$

quindi $\gamma + 1 \leq \alpha^n + 1 \leq \alpha^n + \alpha^n \leq \alpha^n \cdot 2 \leq \alpha^n \cdot \alpha \leq \alpha^{n+1}$

$\alpha^{n+1} = \alpha^{n+1} \cdot 1 < \alpha^{n+1} \cdot \alpha = \alpha^{n+2} \leq \alpha^\omega$

Dimostriamo che $\beta \geq \omega \Rightarrow \alpha^\beta$ è limite. Scriviamo $\beta = n + \gamma$ quindi $\alpha^{\omega+\gamma} = \alpha^\omega \cdot \alpha^\gamma =$ limite $\cdot \alpha^\gamma =$ limite per B.2.

Rimane il caso α limite e $\beta < \omega$. Scrivendo $\beta = n+1$ abbiamo $\alpha^\beta = \alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha = \alpha^n \cdot$ limite $=$ limite per B.2.

Esercizio B

Nella soluzione di questo esercizio non puoi assumere l'assioma di scelta.

B.1 – Dimostra che, se esiste un buon ordinamento sull'insieme X, allora esiste un ordinamento totale sull'insieme delle parti di X.

B.2 – Dimostra che, per ogni insieme X, è ben definito l'ordinale $\Gamma(X)$ i cui elementi sono gli ordinali che possono essere messi in bigezione con un sottoinsieme di X.

B.3 – Dimostra l'assioma della scelta supponendo che, per ogni insieme X, l'esistenza di un buon ordinamento su X implichi l'esistenza di un buon ordinamento sull'insieme delle parti di X.
Suggerimento: costruisci, per ricorsione transfinita, una sequenza di buoni ordinamenti compatibili sui V_β con $\beta \leqslant \alpha$, sfruttando un singolo buon ordinamento su $\mathcal{P}(\Gamma(V_\alpha))$.

B.1 Fisso $<$ b.o. su X. Dato $A \neq B \in \mathcal{P}(X)$ dico $A \prec B$ se $\min(A \triangle B) \in A$.

$\Leftrightarrow (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

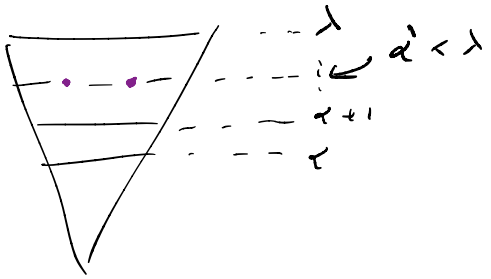
- $A \neq B \Rightarrow \min(A \triangle B) \in A \cup B$ quindi $\cdot \in A$ o $\in B$
  quindi o $A \prec B$ o $B \prec A$.
- $A \prec B \prec C \Rightarrow$ Siano $x = \min(A \triangle B)$
  $y = \min(B \triangle C)$
  Supponiamo $x < y$ allora $\forall z < x \; z \in A \Leftrightarrow z \in B \Leftrightarrow z \in C$
  inoltre $x \in A$ e $x \notin B$, ma $x < y$,
  quindi $x \notin C$ (altrimenti $x \in B \triangle C$)
  di conseguenza $x = \min(A \triangle C)$.
  Supponiamo $y < x \Rightarrow \forall z < y \; z \in A \Leftrightarrow z \in C$ come prima
  $y \in B$ e $y \notin C$. siccome $y < x$
  $y \in B \Rightarrow y \in A$. quindi $y = \min(A \triangle C)$
  Se $y = x \Rightarrow x \in A$ e $x \notin B$
  $\Rightarrow$
  $y \in B$ e $y \notin C$

6.3 Dato un qualunque X esiste $\alpha \in Ord$ t.c. $X \in V_\alpha$.
Quindi $X \subseteq V_\alpha$ (per la transitività dei V_α).
Per cui basta dimostrare che per ogni $\alpha \in Ord$, V_α è ben ordinabile.

$$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$$

IPOTESI:
$\square$ b.o. $\rightarrow$ $\mathcal{P}(\square)$ b.o.

$$V_\lambda = \bigcup \{ V_\alpha \mid \alpha < \lambda \}$$



Fissiamo $<$ b.o. su $\mathcal{P}(H(V_\alpha))$
Costruiamo per induzione transfinita un buon ordinamento $\prec_\beta$ su V_β per ogni $\beta \leq \alpha$, in modo tale che se $\beta' < \beta \leq \alpha$ allora $(V_{\beta'}, \prec_{\beta'})$ sia un s.i. di $(V_\beta, \prec_\beta)$.

- Dato $\prec_\beta$ costruiamo $\prec_{\beta+1}$. Dato $\prec_\beta$ esiste un unico isomorfismo $f_\beta : (V_\beta, \prec_\beta) \rightarrow \nu_\beta$ con ν_β ordinale.
Ora $V_\beta \in V_\alpha$ quindi $\nu_\beta < H(V_\alpha)$, e $\nu_\beta \subseteq H(V_\alpha)$.
Per cui $\mathcal{P}(\nu_\beta) \in \mathcal{P}(H(V_\alpha))$.
Definisco l'ordine $\prec_{\beta+1}$, su $V_{\beta+1} = \mathcal{P}(V_\beta)$

$$A \prec^* B \overset{\text{def.}}{\iff} f_\beta[A] < f_\beta[B]$$

che è ben definito poiché $\mathcal{F}_n[A], \mathcal{F}_n[B] \subseteq H(V_\alpha)$.

Definisco

$$A \prec_{n+1} B \xleftarrow{\text{def}} \begin{cases} A \prec_n B & \text{se } A, B \in V_n \\ B \in V_{n+1} & \text{se } A \notin V_{n+1} \\ A \prec^* B & \text{se } A, B \in V_{n+1} \setminus V_n \end{cases}$$

- Dato λ limite e $\prec_\alpha$ per ogni $\alpha < \lambda$ definisco

$$\prec_\lambda = \bigcup \{ \prec_\alpha \mid \alpha < \lambda \}.$$