Def $(S, <)$ è ben ordinato se

- $(S, <)$ è un ordine totale
- $\forall A \subseteq S \quad A \neq \emptyset \rightarrow$ "A ha un minimo"

$$\exists m \in A \ \forall x \in A \ m \leq x$$

Def Sia $(S, <)$ tot. ordinato, $a \in S$

Il segmento iniziale principale determinato da a è

$$S_a \overset{\text{def.}}{=} \{x \in S \mid x < a\}$$

Prop Ogni segmento iniziale proprio di un buon ordine è principale

Dim Sia $(S, <)$ b.o. $I \subsetneq S$ segmento iniziale di S.

Sia $a = \min(S \setminus I)$

Verifichiamo che $I = S_a$

$x \in S_a \rightarrow x < a \rightarrow x \notin S \setminus I \rightarrow x \in I$

$x \in I \wedge a \leq x \rightarrow a \in I$ ma quindi $x \in I \rightarrow x < a \rightarrow x \in S_a$

Esercizio Vale anche il viceversa. Se ogni segmento iniziale proprio di $(A, <)$ è principale allora $(A, <)$ è un b.o.

Lem Sia $(A, <)$ b.o. $f : A \rightarrow A$ crescente ($\overset{\text{def.}}{\uparrow}$ $x < y \rightarrow f(x) < f(y)$)

Allora $\forall x \in A \ f(x) \geq x$

Dim Per assurdo supponiamo che ci sia $x \in A$ con $f(x) < x$.

Consideriamo $S = \{x \in A \mid f(x) < x\}$ e $k = \min S$.

In particolare $f(k) < k$, e, siccome f è crescente, $f(f(k)) < f(k)$, quindi $f(k) \in S$, ma $f(k) < k = \min S$ ↯

Con. ① Un b.o. non è iso a un suo segmento iniziale proprio

② $\exists!$ iso fra un b.o. e se stesso (l'identità)

③ Se $(A,<)$ e $(B,<)$ sono b.o. isomorfi allora $\exists!$ iso fra A e B

Dim. ① Sia $(A,<)$ b.o. e $f: A \to A_x$ iso. per qualche $x \in A$.
Allora $f(x) \in A_x$ quindi $f(x) < x$. Però f è crescente per cui $f(x) \geq x$ per il lemma precedente. ↯

② Sia $f: A \to A$ automorfismo di $(A,<)$ diverso dall'identità. Allora esiste $x \in A$ t.c. $f(x) \neq x$.
Se $f(x) < x$, f è crescente e contraddice il lemma
Se $f(x) > x$, f^{-1} è crescente e contraddice il lemma ↯

③ Facile conseguenza di ②.

Oss. "La relazione essere iso. a un segm. di è transitiva".
Siano $(A,<)$, $(B,<)$, $(C,<)$ b.o. supponiamo che
$(A,<)$ sia isomorfo ad un s.i di $(B,<)$
$(B,<)$ " " " " " " $(C,<)$
allora $(A,<)$ è isomorfo ad un s.i di $(C,<)$.

Dim. Siano $f: A \to B$ e $g: B \to C$ gli iso. Sia $x \in g \circ f[A]$
Sia $y \in C$ con $y < x$. Dobbiamo dire che $y \in g \circ f[A]$.
Sia $x = g(f(a))$. Siccome $g[B]$ è un s.i., $y = g(b)$ per qualche $b \in B$. Siccome g è un iso, $b < f(a)$. Siccome $f[A]$ è un s.i. $b = f(\beta)$ per qualche $\beta \in A$, quindi $y = g(f(\beta))$.

Oss "La relazione essere iso. a un s.i. di fun tipi di b.o. a meno di isomorfismo è antisimmetrica"

Siano $(A, <)$, $(B, <)$ b.o. tali che

$(A, <)$ sia isomorfo ad un s.i. di $(B, <)$

$(B, <)$ " " " " " " $(A, <)$

allora $(A, <) \sim (B, <)$

Dim Siano $f: A \to B$ e $g: B \to A$ gli iso. Per la dim. dell'osservazione precedente $g \circ f$ è un iso fra A ed un suo s.i. Per il corollario ①, $g \circ f[A] = A$. Per il corollario ② $g \circ f$ è l'identità su A. Quindi f è un isomorfismo e $g = f^{-1}$.

Notazione

$(A, <) \precsim (B, <) \overset{\text{def.}}{\equiv}$ $(A, <)$ è isomorfo a un s.i. di $(B, <)$

$(A, <) \prec (B, <) \overset{\text{def}}{\equiv}$ ——— proprio ———

Oss.

$(A, <) \prec (B, <) \leftrightarrow (A, <) \precsim (B, <) \wedge (A, <) \neq (B, <)$

$(A, <) \precsim (B, <) \wedge (B, <) \precsim (A, <) \to (A, <) \sim (B, <)$

Teo "I tipi di buon ordinamento sono totalmente ordinati fra loro, dalla relazione di ordine lungo che dice: $(A, <)$ è isomorfo a un segmento iniziale di $(B, <)$"

Siano $(A, <)$ e $(B, <)$ b.o. allora vale una e una sola delle seguenti

(1) $(A, <)$ è $\sim$ a un seg. in. proprio di $(B, <)$

(2) $(A, <) \sim (B, <)$

(3) $(B, <)$ è $\sim$ a un seg. in. proprio di $(A, <)$

Dim

Per il corollario precedente, può verificarsi al più uno dei tre casi (1), (2), (3). Definiamo una una funzione f e dimostriamo che f è un isomorfismo di ordini fra un segmento iniziale di A e un segmento iniziale di B. Dimostriamo inoltre che $A = dom(f)$ v $B = im(f)$. Questo è sufficiente per concludere la dimostrazione.

Sia $$f = \{(a, b) \in A \times B \mid A_a \sim B_b\}$$

(1) f è una funzione iniettiva

(1.1) funzione Se, per assurdo $(a, b), (a, b') \in f$ con $b \neq b'$ assumendo senza perdita di generalità $b < b'$ $B_b \sim A_a \sim B_{b'}$ ma $B_b \subset B_{b'}$ (perché $b < b'$) ↯

(1.2) iniettiva Se $(a, b), (a', b) \in f$ con $a \neq a'$ allora $A_a \sim B_b \sim A_{a'}$ ma $A_a \subset A_{a'}$ ↯

(2) f è un iso di ordini fra $\mathrm{Dom}(f)$ $\mathrm{Im}(f)$

Siano $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ con $x < y$. Vogliamo dimostrare $f(x) < f(y)$.

Supponiamo per assurdo $f(y) \leq f(x)$, allora

$$A_y \sim B_{f(y)} \preceq B_{f(x)} \sim A_x \prec A_y \Rightarrow A_y \prec A_y$$ ↯

(3) $\mathrm{Dom}(f)$ è un segmento iniziale di A

Sia $x \in \mathrm{Dom}(f)$ e $y < x$. Vogliamo mostrare $y \in \mathrm{Dom}(f)$.

$A_y \prec A_x$ e $A_x \prec B$, quindi $A_y \prec B$. Siccome ogni segmento iniziale proprio è principale, esiste $z \in B$ tale che $A_y \simeq B_z$. Quindi $(y, z) \in f$.

(4) $\mathrm{Im}(f)$ è un segmento iniziale di B

Discorso simmetrico a (3)

(5) O $\mathrm{Dom}(f) = A$ o $\mathrm{Im}(f) = B$.

Se non è così $\mathrm{Dom}(f) = A_x$ e $\mathrm{Im}(f) = B_y$, per opportuni $x \in A$ e $y \in B$. Allora, per (2), $A_x \simeq B_y$. Quindi, per la definizione di f, $(x, y) \in f$. ↯ □

Esercizio Sia $(A, <)$ b.o. e $B \not\subseteq A$. Dimostrare che $B \preceq A$ ma non necessariamente $B \prec A$.

Esercizio Sia $(A, <)$ un ordine totale con $A = \bigcup S$.

Supponiamo che (1) ogni $X \in S$ è b.o. dall'ordinamento di A

(2) $\forall X, Y \in S$ o X è s.i di Y o Y è s.i di X

Allora $(A, <)$ è un b.o. — Pare controes. se non vale (2).