Def (operazioni aritmetiche sui b.o.)

Siano $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ b.o.

$$(A, \leq_A) + (B, \leq_B) \overset{\text{def.}}{=} (A \sqcup B, \leq_+)$$

$x \leq_+ y$ se $x, y \in A$ e $x \leq_A y$

o $x, y \in B$ e $x \leq_B y$

o $x \in A$ e $y \in B$

$$(A, \leq_A) \times (B, \leq_B) \overset{\text{def.}}{=} (A \times B, \leq_\times)$$

$(a, b) \leq_\times (a', b')$ se $b <_0 b'$

o $b = b'$ e $a \leq_A a'$

Data $f : B \to A$ $\quad Supp(f) = \{x \in B \mid f(x) \neq \min(A)\}$

$$(A, \leq_A)^{(B, \leq_B)} \overset{\text{def.}}{=} \left(\{f : B \to A \mid |Supp(f)| < \aleph_0\}, \leq_{\text{lex}} \right)$$

$f \leq_{\text{lex}} g$ se detto x il massimo tale che $f(x) \neq g(x)$ vale $f(x) \leq_A g(x)$

Esercizio Verificare che $A+B$, $A \times B$, A^B sono b.o., e che inoltre valgono le seguenti proprietà

$(A+B)+C \sim A+(B+C)$ $\quad A \times (B \times C) \sim (A \times B) \times C$

$A \times (B+C) \sim A \times B + A \times C$ $\quad A^{B+C} \sim A^B \times A^C$ $\quad (A^B)^C \sim A^{B \times C}$

Esercizio ESIBIRE CONTROESEMPI ALLE SEGUENTI

$A+B \sim B+A$ $\quad A \times B \sim B \times A$ $\quad (A+B) \times C \sim A \times C + B \times C$ $\quad (A \times B)^C \sim A^C \times B^C$

Gli ordinali

Def α è un **ordinale** (di Von Neumann) se
α è transitivo* e b.o. dall'appartenenza

Più precisamente detta $<_\alpha = \{(x,y) \in \alpha \times \alpha \mid x \in y\}$
α è b.o. dall'appartenenza se $(\alpha, <_\alpha)$ è un b.o.

*Ricordiamo la seguente definizione

Def α è **transitivo** se $\forall x \in \alpha \; x \subseteq \alpha$.

Esempio ω è un ordinale

Oss. Sia α ordinale e $\beta \in \alpha$. Allora β è un ordinale
e $\beta = \alpha_\beta$.

Dim β è b.o. dall'appartenenza in quanto $\beta \subseteq \alpha$.
Transitività: sia $\gamma \in \beta$, dobbiamo dimostrare $\gamma \subseteq \beta$.
Ossia dato $\delta \in \gamma$ dobbiamo dimostrare $\delta \in \beta$. Per la
transitività di α, $\gamma, \delta \in \alpha$. Per la transitività dell'ordine
su α $\delta \in \gamma \wedge \gamma \in \beta \to \delta \in \beta$.
Infine $\beta = \alpha_\beta$ segue dal fatto che $\gamma \in \beta \to \gamma \in \alpha$ per la
transitività di α, quindi $\gamma \in \beta \to \gamma <_\alpha \beta$.
Esempio per l'oss. $\forall n \in \omega$ n è un ordinale.

Prop. Siano α, β ordinali, allora $(\alpha, <_\alpha) \sim (\beta, <_\beta) \to \alpha = \beta$

Dim Sia $f : \alpha \to \beta$ l'isomorfismo. Basta dimostrare che $\forall x \in \alpha \; f(x) = x$. Consideriamo $\gamma \in \alpha$ minimo t.c. $f(\gamma) \neq \gamma$.

$$\gamma = \alpha_\gamma = f[\alpha_\gamma] = \beta_{f(\gamma)} = f(\gamma)$$

perché f è iso di ordinali

$\lightning$

Tro "La classe degli ordinali è totalmente ordinata dall'appartenenza"

Siano α, β ordinali allora vale esattamente una delle seguenti alternative:

① $\alpha \in \beta$ ② $\alpha = \beta$ ③ $\beta \in \alpha$.

Dim Supponiamo che valga una delle seguenti:

① $(\alpha, <_\alpha) \lhd (\beta, <_\beta)$ ② $(\alpha, <_\alpha) \sim (\beta, <_\beta)$ ③ $(\beta, <_\beta) \lhd (\alpha, <_\alpha)$

Se ①: esiste $\gamma \in \beta$ $(\alpha, <_\alpha) \sim \beta_\gamma = \gamma$. Quindi $\alpha = \gamma$ per la proposizione. Di conseguenza $\alpha \in \beta$.

Se ②: $\alpha = \beta$ per la prop.

Se ③: $\beta \in \alpha$ procedendo simmetricamente al caso ①

Inoltre non possono valere due delle alternative, altrimenti si avrebbe $\alpha \in \alpha$ violando il fatto che $<_\alpha$ è un ordine stretto

$\square$

Notazione Se α, β sono ordinali $\alpha < \beta \overset{\text{def.}}{\equiv} \alpha \in \beta$.

Esercizio $\alpha \in \omega \iff \alpha$ è un ordinale finito.

Prop Siano α, β ordinali. $\alpha \leq \beta \iff \alpha \subseteq \beta$

Dim. $\rightarrow$ $\alpha < \beta \rightarrow \alpha \in \beta \rightarrow \alpha \subseteq \beta$.

$\alpha = \beta \rightarrow \alpha \subseteq \beta$.

$\leftarrow$ Supponiamo per assurdo $\alpha \subseteq \beta$ e $\beta < \alpha$.

allora $\beta \in \alpha$, quindi $\beta \in \beta$ ↯

Def Sia α ordinale $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$

Prop Sia α ordinale, $\alpha+1$ è il minimo ordinale $> \alpha$.

Dim $\alpha < \beta \rightarrow \alpha \in \beta \rightarrow \alpha \subseteq \beta$

$\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta \rightarrow \alpha + 1 \in \beta$

Prop Sia X un insieme di ordinali non vuoto

1. esiste il minimo $\alpha \in X$ — detto $\min(X)$
2. esiste il minimo β t.c. $\forall \alpha \in X \ \beta \geq \alpha$ — detto $\sup(X)$
3. esiste un ordinale non contenuto in X.

Dim

1. $\min(X) = \bigcap X$

Verifica: sia $\alpha \in X$, sia $\mu = \min_{\leq \alpha+1}((\alpha+1) \cap X)$.

Se $\beta \in X$, o $\beta \leq \alpha \rightarrow \beta < \alpha+1 \rightarrow \mu \leq \beta \rightarrow \mu \subseteq \beta$

o $\alpha < \beta \rightarrow \alpha + 1 \leq \beta \rightarrow \mu < \beta$

quindi $\mu \subseteq \bigcap X$.

D'altro canto $\mu \in X$, quindi $\bigcap X \subseteq \mu$.

(2) $\sup(X) = \bigcup X$

Verifichiamo: assumendo che $\bigcup X$ sia un ordinale, allora deve essere $\sup(X)$ perché

$\forall \alpha \in X \ \alpha \leq \sigma \leftrightarrow \forall \alpha \in X \ \alpha \subseteq \sigma \leftrightarrow \bigcup X \subseteq \sigma \leftrightarrow \bigcup X \leq \sigma$

Dobbiamo vedere che $\bigcup(X)$ è un ordinale.

- transitività: $\alpha \in \bigcup(X) \to \alpha \in \beta \in X$ per qualche β
$\to \alpha \subseteq \beta \in X \to \alpha \subseteq \bigcup X$
- b.o.: un sottoinsieme di $\bigcup(X)$ è un insieme di ordinali: per (1) ha minimo.

(3) Basta considerare $\sup(X)+1$.

Cor Un insieme di ordinali è un ordinale se e solo se è transitivo

Dim Infatti per (2) esso è automaticamente b.o. da $\in$.

Prop. (paradosso di Burali-Forti)
Non esiste l'insieme di tutti gli ordinali.

Dim Se esistesse quello insieme O, per la prop. sarebbe b.o., quindi sarebbe un ordinale, ma allora $O \in O$. ↯

Nota Un ordinale è l'insieme degli ordinali minori di lui

$$\alpha = \{\beta \text{ ordinale} \mid \beta < \alpha\}$$