L'assioma del rimpiazzamento

Scopo di questa sezione: ogni b.o. è $\sim$ a un ordinale

Notazione indichiamo con Ord la classe degli ordinali.

Per cui $x \in Ord \overset{def.}{\equiv}$ x è un ordinale. Quindi $\forall \alpha \in Ord \dots$ o anche $\forall$ ordinale $\alpha \dots$ significa "per ogni ordinale $\alpha \dots$" e, tecnicamente, $\forall \alpha \in Ord \dots \overset{def.}{\equiv} \forall \alpha (\alpha \text{ è ordinale} \to \dots)$

Def Date due classi A e B una **funzione classe** da A a B è una formula insiemistica $\varphi(x,y)$ tale che

$$\forall x \in A \; \exists! y \in B \; \varphi(x,y)$$

"Una funzione classe è una proprietà, espressa nel linguaggio della teoria degli insiemi, che ad ogni $x \in A$ associa un unico $y \in B$"

Possiamo denotare una funzione classe $\varphi(x,y)$ da A a B con $F: A \to B$ dove si intende che la scrittura $y = F(x)$ è una semplice abbreviazione per $y \in B \wedge \varphi(x,y)$.

Esempi funzioni classe $V \to V$ $\overset{def.}{\equiv}$ classe di tutti gli insiemi

$$F(x) = \{x\} \qquad F(x) = \mathcal{P}(x) \qquad F(x) = x \cup \{x\}$$

funzione classe $Ord \to Ord$ $\quad F(x) = ((x+1)+1)+1$

funzione classe $V \to Ord$ $\quad F(x) = Sup(x \cap Ord)$

Assioma (schema di assiomi del rimpiazzamento)

Data una funzione classe $F: V \to V$ vale l'assioma

$$\forall S \; \exists T \; \forall x \in S \quad F(x) \in T$$

Nota Per l'assioma di separazione abbiamo

$$\forall S \; \exists! T \; \forall y \; y \in T \leftrightarrow (\exists x \in S \;\; F(x) = y)$$

denotiamo questo T con la scrittura $F[S]$

Nota Data una funzione classe $F : A \to B$

"$\forall S \subseteq A \; \exists! T \subseteq B \;\; T = F[S]$"

$$\forall S \subseteq A \; \exists! T \subseteq B \; \forall y \; y \in T \leftrightarrow (\exists x \in S \;\; F(x) = y)$$

Dim. Applichiamo l'assioma alla funzione classe $G : V \to V$

$$G(x) = F(x) \text{ se } x \in A, \; \emptyset \text{ altrimenti}$$

se $x \in S \subseteq A$ allora $G(x) = F(x) \in B$, per cui $T = G[S]$ è l'insieme cercato. ∎

Esercizio Dati A e B insiemi, dimostrare che esiste $A \times B$ usando l'assioma del rimpiazzamento e non le parti!

Teo Dato un buon ordine $(S, <)$ esiste un unico ordinale α tale che $(S, <) \sim \alpha$.

Dim L'unicità segue perché $\alpha \sim \alpha' \to \alpha = \alpha'$.

Basta dimostrare l'esistenza di α. Sia

$$S' = \{x \in S \mid \exists \text{ ordinale } \gamma \;\; S_x \sim \gamma\}$$

Consideriamo la funzione classe $F : S' \longrightarrow Ord$

$$x \in S' \longrightarrow F(x) = \gamma \text{ ordinale t.c. } S_x \sim \gamma$$

Intanto F è una funzione classe, perché

$$F(x) = \gamma \wedge F(x) = \gamma' \to S_x \sim \gamma \wedge S_x \sim \gamma' \to \gamma \sim \gamma' \to \gamma = \gamma'$$

Vogliamo dimostrare che $\alpha \overset{def}{=} F[S'] \sim (S, <)$.

- α è un ordinale. α è un insieme di ordinali, ci basta quindi dire che è transitivo. Supponiamo $\beta < \gamma \in \alpha$, dobbiamo dire che $\beta \in \alpha$. Sia $f : \gamma \to S_x$ isomorfismo, allora $f_{|\beta} : \beta \to S_{f(\beta)}$ è un iso, quindi $\beta = F(f(\beta))$.
- S' è un segmento iniziale di S. Se $y < x \in S'$ allora esiste $f : S_x \to \gamma$ iso, quindi $f_{|S_y} : S_y \to f(y)$ è un iso. Per cui $y \in S'$.
- α ed S' sono isomorfi. Sia

$$f : S' \to \alpha$$
$$x \longmapsto F(x)$$

Vediamo che f è un isomorfismo di ordini. L'iniettività è chiara, basta dire che è crescente

$$x < y \to S_x \prec S_y$$
$$\wr \qquad \wr$$
$$f(x) \prec f(y) \to f(x) < f(y)$$

- $S' = S$. Se così non fosse avremmo $S' = S_k$ per qualche $k \in S$. Ma, siccome $S_k = S' \sim \alpha$, e S' è l'insieme degli x tali che S_x è $\sim$ a un ordinale, avremmo $k \in S'$. ∎

Cor. Le operazioni

$$\alpha + \beta \sim (\alpha, <_\alpha) + (\beta, <_\beta) \qquad \alpha \cdot \beta \sim (\alpha, <_\alpha) \cdot (\beta, <_\beta)$$

$$\alpha^\beta \sim (\alpha, <_\alpha)^{(\beta, <_\beta)}$$

sono ben definite.