Induzione e ricorsione transfinita

Esercizio "Dimostrare che esiste $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots\}$"

Dimostrare che esiste il più piccolo insieme S contenente l'elemento $\emptyset$ e tale che $\forall x \in S \; \{x\} \in S$

Soluzione Basta dimostrare che esiste un insieme T tale che $\emptyset \in T$ e $\forall x \in T \; \{x\} \in T$. Avremmo infatti

$$S = \{y \mid \forall S' \; (\emptyset \in S' \wedge \forall x \in S' \; \{x\} \in S') \to y \in S'\}$$

"gli y che appartengono a tutti gli S' che soddisfano le richieste (ossia $\emptyset \in S'$ e $\forall x \in S' \; \{x\} \in S'$)"

$$= \{y \in T \mid \ldots\}$$

e questo esiste per separazione.

Se avessimo una funzione f tale che $\mathrm{Dom}(f) = w$, $f(0) = \emptyset$, e $\forall n \in w \; f(n+1) = \{f(n)\}$ potremmo definire $T = f[w]$.

Infatti se $x \in T$, allora $x = f(n)$ per qualche $n \in w$, quindi $\{x\} = f(n+1) \in T$.

Ci manca solo di costruire f, e per questo basta inventarsi la proposizione seguente (da applicare con $G(x) = \{x\}$).

Prop. Sia $G : V \to V$ una funzione classe, e S un insieme. Allora esiste un'unica funzione f con $\mathrm{Dom}(f) = w$ che soddisfa $f(0) = S$ e $\forall n \in w \; f(n+1) = G(f(n))$.

Dim

Dimostriamo intanto l'esistenza. Basta trovare una funzione

classe $F : w \to V$ tale che

$$F(0) = S \quad e \quad \forall n \in w \quad F(n+1) = G(F(n))$$

Infatti avremmo, per rimpiazzamento, che esiste l'insieme $F[w]$. Da cui si può definire per separazione

$$f = \{(n, y) \in w \times F[w] \mid y = F(n)\}$$

Definiamo la funzione classe F come segue

$$F(n) = y \overset{def.}{\equiv} \exists f \begin{cases} f \text{ è una funzione} \\ Dom(f) = n+1 \\ \forall i \in n \quad f(i+1) = G(f(i)) \\ f(0) = S \\ f(n) = y \end{cases}$$

Dimostriamo per induzione che $\forall n \; \exists! y \; y = F(n)$.

- caso $n = 0$ immediato
- caso $n+1$ Per il caso n, $\exists$ funzione f $Dom(f) = n+1$ etc. La funzione $f \cup \{(n+1, G(f(n)))\}$ soddisfa la richiesta per il caso $n+1$ con $y = G(f(n))$, quindi $\exists y \; y = F(n+1)$.

Per dimostrare l'unicità basta dimostrare che $y = F(n+1)$ implica $\exists z \; z = F(n) \wedge y = G(z)$ infatti, per ipotesi induttiva, $\exists! z \; z = F(n)$. Fissiamo un y che soddisfa $y = F(n+1)$. Allora esiste f funzione con $Dom(f) = n+2$ etc. $f(n+1) = y$. Osserviamo che $f|_{n+1}$ soddisfa la richiesta del caso n pertanto $z = f(n)$ soddisfa la formula $z = F(n)$.

D'altro canto $y = f(n+1) = h(f(n)) = h(?)$.

Ora, è immediato verificare che $F(0) = S$. Inoltre, se $F(n) = y$ allora esiste un testimone f di questo, quindi $f \cup \{(n+1, f(y))\}$ testimonia che $F(n+1) = h(y) = G(F(n))$.

Di conseguenza F è la funzione classe cercata. ∎

Nota Presto dimostreremo un teorema più forte della proposizione precedente. Quindi, di questa proposizione, non è importante l'enunciato. Ma è fondamentale averne capito bene la dimostrazione, perché contiene, in forma più chiara, le idee fondamentali del teorema.

Esercizio Dato un insieme S dimostrare che esiste il più piccolo insieme transitivo che ha S come sottoinsieme. Questo si chiama chiusura transitiva di S, denotato $tc(S)$.

Soluzione Chiaramente basta dire che esiste un insieme transitivo T tale che $S \subseteq T$. Poi il minimo sarà

$$\{x \in T \mid \forall T' \, (T' \text{ transitivo} \wedge S \subseteq T') \to x \in T'\}.$$

(ossia l'intersezione di tutti i $T' \supseteq S$ transitivi)

A questo scopo, consideriamo una funzione f con $Dom(f) = \omega$ tale che $f(0) = S$ e $\forall n \in \omega \; f(n+1) = \bigcup f(n)$.

Allora $T = \bigcup f[\omega]$ funziona. Infatti se $x \in T$, allora $x \in f(n)$ per qualche $n \in \omega$, quindi

$$x \subseteq \bigcup f(n) = f(n+1) \subseteq \bigcup f[\omega] = T$$

∎

Prop (induzione transfinita – v.1)

Sia $\varphi(x)$ una formula insiemistica (ossia $\varphi(x)$ è una PROPRIETÀ INSIEMISTICA, una proprietà che può essere espressa nel linguaggio formale della teoria degli insiemi).

Se $\forall$ ordinale α $\left(\forall \beta < \alpha \ \varphi(\beta)\right) \to \varphi(\alpha)$

allora $\forall$ ordinale α $\varphi(\alpha)$.

Dim Per assurdo assumiamo $\neg\varphi(\alpha)$, per l'ipotesi abbiamo $\neg(\forall \beta < \alpha \ \varphi(\beta))$ ossia $\exists \beta < \alpha \ \neg\varphi(\beta)$. Consideriamo il minimo di questi β, ossia $\beta_0 = \min\{\beta \in \alpha \mid \neg\varphi(\beta)\}$. Di nuovo per l'ipotesi $\exists \beta < \beta_0 \ \neg\varphi(\beta)$ contro la minimalità di β. □

Def Un ordinale α è un successore se $\exists \beta \ \alpha = \beta + 1$

ed è un ordinale limite se $\alpha > 0$ e non è successore.

Esercizio α è successore se e solo se ha un massimo elemento.

Prop (induzione transfinita – v.2)

Sia $\varphi(x)$ una formula insiemistica (come in v.1).

Se
- $\varphi(0)$
- $\forall$ ordinale α $\varphi(\alpha) \to \varphi(\alpha+1)$
- $\forall$ ordinale limite λ $\left(\forall \beta < \lambda \ \varphi(\beta)\right) \to \varphi(\lambda)$

allora $\forall$ ordinale α $\varphi(\alpha)$.

Dim Basta verificare l'ipotesi della v1.: che per ogni α $\left(\forall \beta < \alpha \ \varphi(\beta)\right) \to \varphi(\alpha)$. Se α è limite o $\emptyset$ abbiamo questa formula tout court. Altrimenti $\alpha = \alpha' + 1$ e abbiamo

$$\forall \beta < \alpha \ \varphi(\beta) \implies \varphi(\alpha') \implies \varphi(\alpha) \quad (= \alpha' + 1)$$

□

Nota Data una funzione classe $F : A \to B$ e un insieme $X \subseteq A$ esiste la funzione $f = F|_X : X \to F[X]$

$$a \longmapsto F(a)$$

Teo (ricorsione transfinita)
Data una funzione classe $G : V \to V$ esiste un'unica* funzione classe $F : Ord \to V$ tale che

$$\forall \alpha \in Ord \quad F(\alpha) = G(F|_\alpha)$$

*ossia date F, F' come sopra, vale $\forall \alpha \in Ord \; F(\alpha) = F'(\alpha)$.

Prima di dimostrare il teorema, studiamone alcune conseguenze.
Ci serve la seguente osservazione

Oss. La funzione classe $Ord \to Ord$ $succ : \alpha \to \alpha + 1$ è crescente (quindi, in particolare, iniettiva).

Dim Siano $\alpha < \beta$. Siccome $\alpha + 1$ è il minimo ordinale $> \alpha$, $\alpha + 1 \leq \beta$, e, siccome $\beta < \beta + 1$, $\alpha + 1 < \beta + 1$ ∎