Nota Data una funzione classe $F : A \to B$ e un insieme $X \subseteq A$ esiste la funzione $f = F|_X : X \to F[X]$

$$a \mapsto F(a)$$

Teo (ricorsione transfinita)
Data una funzione classe $G : V \to V$ esiste un'unica* funzione classe $F : Ord \to V$ tale che

$$\forall \alpha \in Ord \quad F(\alpha) = G(F|_\alpha)$$

*ossia date F, F' come sopra, vale $\forall \alpha \in Ord \; F(\alpha) = F'(\alpha)$.

Prima di dimostrare il teorema, studiamone alcune conseguenze. Ci serve la seguente osservazione

Oss. La funzione classe $Ord \to Ord$ $succ : \alpha \to \alpha+1$ è crescente (quindi, in particolare, iniettiva).

Dim Siano $\alpha < \beta$. Siccome $\alpha+1$ è il minimo ordinale $> \alpha$, $\alpha+1 \leq \beta$, e, siccome $\beta < \beta+1$, $\alpha+1 < \beta+1$ ∎

Def Date due classi A, B definiamo la classe $A \times B$

$$x \in A \times B \overset{def}{\iff} \exists a \in A \; b \in B \; x = (a,b)$$

Cor (del teorema di ricorsione transfinita)
Date funzioni classe $G_1 : Ord \times V \to V$ e $G_2 : V \to V$. Detto x_0 un insieme. Esiste un'unica funzione classe F tale che

$$F(0) = x_0$$

$$\forall \alpha \in Ord \quad F(\alpha+1) = G_1(\alpha, F(\alpha))$$

$$\forall \lambda \in Ord \quad \lambda \text{ limite} \to F(\lambda) = G_2(F|_\lambda)$$

Dim Applichiamo il Teo. con la seguente funzione G

$$G(f) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } f \text{ non è funzione con } Dom(f) \in Ord \\ x_0 & \text{se } f = \emptyset \\ G_1(\alpha, f(\alpha)) & \text{se } Dim(f) = \alpha+1 \text{ per qualche } \alpha \in Ord \\ G_2(f) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Con. Esistono le funzioni di somma, prodotto, e potenza ordinale definite come segue.

$$\alpha + 0 = \alpha$$

$$\alpha + (\beta+1) = (\alpha+\beta)+1$$

$$\alpha + \lambda = \sup\{\alpha+\beta \mid \beta < \lambda\}$$

$$\alpha \cdot 0 = 0$$

$$\alpha \cdot (\beta+1) = \alpha\cdot\beta + \alpha$$

$$\alpha \cdot \lambda = \sup\{\alpha\cdot\beta \mid \beta < \lambda\}$$

$$\alpha^0 = 1$$

$$\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$$

$$\alpha^\lambda = \sup\{\alpha^\beta \mid \beta < \lambda\}$$

Prop: $\alpha+\beta \sim (\alpha, <_\alpha) + (\beta, <_\beta)$

$\alpha\cdot\beta \sim (\alpha, <_\alpha)\cdot(\beta, <_\beta)$

$\alpha^\beta \sim (\alpha, <_\alpha)^{(\beta, <_\beta)}$

Dim Per induzione transfinita (seconda versione) su β.

I casi 0 e successore sono conseguenze immediate delle proprietà delle operazioni sui buoni ordini. Vediamo i limiti:

- $\alpha + \lambda \sim (\alpha, <_\alpha) + (\lambda, <_\lambda)$

  Sia $(\alpha+<_\alpha)+(\lambda, <_\lambda) \sim \gamma$ ordinale, e sia $f: \alpha \cup \lambda \to \gamma$ iso.

  Per ogni $\beta < \lambda$, $\alpha \cup \beta$ è segmento iniziale proprio di $\alpha \cup \lambda$

  Quindi $f[\alpha \cup \beta]$ è un s.i. proprio di γ, e, di conseguenza

$f[\alpha \sqcup \beta]$ è un ordinale $< \gamma$. Per ipotesi induttiva, $\alpha + \beta \sim f[\alpha \sqcup \beta]$. Quindi $f[\alpha \sqcup \beta] = \alpha + \beta < \gamma$

Siccome λ è limite, $\lambda = \bigcup \{\beta \mid \beta < \lambda\}$, per cui

$$\alpha \sqcup \lambda = \bigcup \{\alpha \sqcup \beta \mid \beta < \lambda\}$$

$$\gamma = f[\alpha \sqcup \lambda] = \bigcup \{f[\alpha \sqcup \beta] \mid \beta < \lambda\}$$

$$= \bigcup \{\alpha + \beta \mid \beta < \lambda\} = \sup\{\alpha + \beta \mid \beta < \lambda\}$$

- $\alpha \cdot \lambda \sim (\alpha, <_\alpha) \cdot (\lambda, <_\lambda)$

Sia $(\alpha, <_\alpha) \cdot (\lambda, <_\lambda) \sim \gamma$ ordinale, e sia $f : \alpha \times \lambda \to \gamma$ iso.

Ragionando come prima, per ogni $\beta < \gamma$, $f[\alpha \times \beta] = \alpha \cdot \beta < \gamma$.

Chiaramente $\alpha \times \lambda = \alpha \times \bigcup \{\beta \mid \beta < \lambda\} = \bigcup \{\alpha \times \beta \mid \beta < \lambda\}$.

$$\gamma = f[\alpha \times \lambda] = \bigcup \{f[\alpha \times \beta] \mid \beta < \lambda\} = \sup \{\alpha \cdot \beta \mid \beta < \lambda\}$$

- $\alpha^\lambda \sim (\alpha, <_\alpha)^{(\lambda, <_\lambda)}$

Sia $(\alpha, <_\alpha)^{(\lambda, <_\lambda)} \sim \gamma$ ordinale, e sia f l'isomorfismo

$$f : \underbrace{\{h : \lambda \to \alpha \mid |\mathrm{supp}\, h| < \aleph_0\}}_{\text{Chiamiamo questo } FS(\lambda \to \alpha)} \longrightarrow \gamma$$

L'unica difficoltà per ripetere il discorso dei due punti precedenti è correlare $FS(\lambda \to \alpha)$ con $FS(\beta \to \alpha)$ per $\beta < \lambda$.

Definiamo

$$FS(\lambda \to \alpha, \beta) \overset{\text{def}}{=} \{h : \lambda \to \alpha \mid |\mathrm{supp}\, h| < \aleph_0 \wedge \mathrm{supp}\, h \subseteq \beta\}$$

ossia le funzioni $\lambda \to \alpha$ il cui supporto è finito e contenuto in β.

Osserviamo che

$$(\alpha, <_\alpha)^{(\beta, <_\beta)} = FS(\beta \to \alpha) \sim FS(\lambda \to \alpha, \beta) \subseteq (\alpha, <_\alpha)^{(\lambda, <_\lambda)}$$

Infatti una funzione $\beta \to \alpha$ a supporto finito può essere prolungata ad una funzione $\lambda \to \alpha$ mappando in 0 tutti gli elementi di $\lambda \setminus \beta$, e così il supporto rimane $\subseteq \beta$.
Formalmente, l'isomorfismo è

$$\iota : FS(\beta \to \alpha) \longrightarrow FS(\lambda \to \alpha, \beta)$$

$$\iota(h)(x) = \begin{cases} h(x) & \text{se } x < \beta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ora, $FS(\lambda \to \alpha, \beta)$ è un segmento iniziale proprio di $FS(\lambda \to \alpha)$, inoltre $FS(\lambda \to \alpha) = \bigcup \{ FS(\lambda \to \alpha, \beta) \mid \beta < \lambda \}$.
Infatti, presa $h \in FS(\lambda \to \alpha)$, $h \in FS(\lambda \to \alpha, \max(\operatorname{supp} h) + 1)$ e $\max(\operatorname{supp} h) + 1 < \lambda$ poiché $\max(\operatorname{supp} h) \in \lambda$ e λ è limite.
Per ipotesi induttiva $FS(\lambda \to \alpha, \beta) \sim FS(\beta \to \alpha) \sim \alpha^\beta$.
Quindi $f[FS(\lambda \to \alpha, \beta)] = \alpha^\beta$ e, come prima

$$\gamma = f[FS(\lambda \to \alpha)] = \bigcup \{ f[FS(\lambda \to \alpha, \beta)] \mid \beta < \lambda \}$$
$$= \bigcup \{ \alpha^\beta \mid \beta < \lambda \} = \sup \{ \alpha^\beta \mid \beta < \lambda \}$$ ☐

Questa proposizione permette di applicare alle operazioni sugli ordinali le proprietà che abbiamo visto per le corrispondenti operazioni sui buoni ordini.

Prop Le funzioni $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \oplus \beta$ $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$ $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha^\beta$ sono strettamente crescenti nel secondo argomento (per $\alpha \cdot \beta$ assumendo $\alpha \neq 0$, per α^β assumendo $1 < \alpha$) e mai-decrescenti nel primo argomento.

Ci servirà la nota seguente

Nota: Dati due insiemi di ordinali X, Y non vuoti:

$$\forall \alpha \in X \ \exists \beta \in Y \ \alpha \leq \beta \rightarrow \sup X \leq \sup Y$$

Dim Basta osservare che ogni maggiorante di Y è anche un maggiorante di X. Infatti, se γ non maggiora X, allora c'è $\alpha \in X$ con $\gamma < \alpha$, quindi c'è $\beta \in Y$ con $\gamma < \alpha \leq \beta$, ossia β non maggiora neanche Y.
Siccome ogni maggiorante di Y maggiora anche X, il minimo dei maggioranti di Y, $\sup Y$, è anche un maggiorante di X, quindi $\geq$ del minimo dei maggioranti di X, $\sup X$.

Dim (della proposizione)

- $\beta_1 < \beta_2 \rightarrow \alpha + \beta_1 < \alpha + \beta_2$

  Per induzione transfinita, seconda forma, su β_2.

  se $\beta_2 = 0$ vero a vuoto

  se $\beta_2 = \gamma + 1$, allora $\beta_1 \leq \gamma$ quindi, per ipotesi induttiva*

  $$\alpha + \beta_1 \overset{*}{\leq} \alpha + \gamma < (\alpha + \gamma) + 1 = \alpha + (\gamma + 1) = \alpha + \beta_2$$

  se β_2 è limite allora $\beta_1 < \beta_2 \rightarrow \beta_1 + 1 < \beta_2$ quindi

  $$\alpha + \beta_1 \overset{*}{<} \alpha + (\beta_1 + 1) \leq \sup \{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta_2\} = \alpha + \beta_2$$

- $\beta_1 < \beta_2 \rightarrow \alpha \cdot \beta_1 < \alpha \cdot \beta_2$

  Per induzione transfinita, seconda forma, su β_2.

  se $\beta_2 = 0$ vero a vuoto

se $\beta_2 = \gamma + 1$, allora $\beta_1 \leq \gamma$ quindi, per ipotesi induttiva*

$$\alpha \cdot \beta_1 \overset{*}{\leq} \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + 0 \overset{\square}{<} \alpha \cdot \gamma + \alpha = \alpha \cdot (\gamma + 1) = \alpha \cdot \beta_2$$

dove nella terza disuguaglianza si sfrutta l'ipotesi $\alpha \neq 0$ ed il risultato precedente sulle somme

se β_2 è limite si conclude come con la somma.

- $\beta_1 < \beta_2 \rightarrow \alpha^{\beta_1} < \alpha^{\beta_2}$ ESERCIZIO
- $\alpha_1 < \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 + \beta \leq \alpha_2 + \beta$

Per induzione transfinita, seconda forma, su β.

se $\beta = 0$ allora $\alpha_1 + \beta = \alpha_1 < \alpha_2 = \alpha_2 + \beta$.

se $\beta = \gamma + 1$ allora, per ipotesi induttiva*

$$\alpha_1 + \beta = \alpha_1 + (\gamma + 1) = (\alpha_1 + \gamma) + 1 \overset{*}{<} (\alpha_2 + \gamma) + 1 = \alpha_2 + (\gamma + 1) = \alpha_2 + \beta$$

dove nel passaggio * abbiamo usato altresì il fatto che la funzione $\square \mapsto \square + 1$ è crescente.

se β è limite

$$\alpha_1 + \beta = \sup \{ \alpha_1 + \gamma \mid \gamma < \beta \} \overset{\square}{\leq} \sup \{ \alpha_2 + \gamma \mid \gamma < \beta \} = \alpha_2 + \beta$$

in cui la disuguaglianza centrale segue dall'ipotesi induttiva e dalla nota.

ESERCIZIO: Perché la medesima dimostrazione non permette di concludere che $\alpha_1 < \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 + \beta < \alpha_2 + \beta$?

- $\alpha_1 < \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 \cdot \beta \leq \alpha_2 \cdot \beta$ ESERCIZIO
- $\alpha_1 < \alpha_2 \rightarrow \alpha_1^{\beta} \leq \alpha_2^{\beta}$ ESERCIZIO

∎

Dimostreremo il risultato seguente

Tco (forma normale di Cantor)

Ogni ordinale α può essere espresso in maniera unica come somma finita

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

con $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n$ ordinali e $k_1, k_2, \dots, k_n \in \omega \setminus \{0\}$.

Prima di dimostrare il teorema, vediamo qualche esempio.

Esercizio Scrivere i seguenti ordinali in forma normale

- $1 + \omega$ risultato: ω (formalmente $\omega^1 \cdot 1$)

  Sappiamo che $\omega = 0 + \omega \leq 1 + \omega$, ci serve la disug. opposta

  $$1 + \omega = \sup \{1 + n \mid n \in \omega\} \overset{*}{\leq} \sup \omega \overset{\square}{=} \omega$$

  $*$ poiché $\{1 + n \mid n \in \omega\} \subseteq \omega$

  $\square$ **Nota**: Se λ è limite $\sup \lambda = \lambda$

  Se α è successore $(\sup \alpha) + 1 = \alpha$

  Dim: FACILE ESERCIZIO

- $(\omega + 1) \cdot 2$ risultato: $\omega \cdot 2 + 1$ (formalmente $\omega^1 \cdot 2 + \omega^0 \cdot 1$)

  $$(\omega + 1) \cdot 2 = (\omega + 1) + (\omega + 1) = \omega + (1 + \omega) + 1 = \omega + \omega + 1 = \omega \cdot 2 + 1$$

- $(\omega + 1) \cdot n$ con $n \in \omega \setminus \{0\}$ risultato $\omega \cdot n + 1$

  Per induzione su n. Il passo induttivo è come segue

  $$(\omega + 1) \cdot (n+1) = (\omega + 1) \cdot n + (\omega + 1) = (\omega \cdot n + 1) + (\omega + 1) =$$

  $$= \omega \cdot n + (1 + \omega) + 1 = \omega \cdot n + \omega + 1 = \omega \cdot (n+1) + 1$$

- $(\omega+1)\cdot\omega$ risultato ω^2

$$(\omega+1)\cdot\omega = \sup\{(\omega+1)\cdot n \mid n\in\omega\} = \sup\{\omega\cdot n+1 \mid n\in\omega\}$$
$$\leq^{*} \sup\{\omega\cdot n+\omega \mid n\in\omega\} = \sup\{\omega\cdot(n+1) \mid n\in\omega\}$$
$$\leq^{\square} \sup\{\omega\cdot m \mid m\in\omega\} = \omega^2$$

* perché $1<\omega \rightarrow \omega\cdot n+1 < \omega\cdot n+\omega$

$^{\square}$ perché $\{\omega\cdot(n+1) \mid n\in\omega\} \subseteq \{\omega\cdot m \mid m\in\omega\}$

Quindi $(\omega+1)\cdot\omega \leq \omega^2$ e la disug. opposta è immediata.

- $(\omega+1)^2$ risultato: $\omega^2+\omega+1$

$$(\omega+1)^2 = (\omega+1)\cdot(\omega+1) = (\omega+1)\cdot\omega+\omega+1 = \omega^2+\omega+1$$

- $(\omega+1)^2\cdot 2$
- $(\omega+1)^2\cdot n$ con $n\in\omega\setminus\{0\}$
- $(\omega+1)^2\cdot\omega$
- $(\omega+1)^3$
- $(\omega+1)^n$ con $n\in\omega$
- $(\omega+1)^\omega$

ALTRI ESERCIZI
(CIRCA IN ORDINE DI DIFFICOLTÀ)