- $(\omega+1)\cdot\omega$ risultato ω^2

$$(\omega+1)\cdot\omega = \sup\{(\omega+1)\cdot n \mid n\in\omega\} = \sup\{\omega\cdot n+1 \mid n\in\omega\}$$
$$\leq^{*} \sup\{\omega\cdot n+\omega \mid n\in\omega\} = \sup\{\omega\cdot(n+1) \mid n\in\omega\}$$
$$\leq^{\square} \sup\{\omega\cdot m \mid m\in\omega\} = \omega^2$$

* perché $1<\omega \rightarrow \omega\cdot n+1 < \omega\cdot n+\omega$

$\square$ perché $\{\omega\cdot(n+1) \mid n\in\omega\} \subseteq \{\omega\cdot m \mid m\in\omega\}$

Quindi $(\omega+1)\cdot\omega \leq \omega^2$ e la disug. opposta è immediata.

- $(\omega+1)^2$ risultato: $\omega^2+\omega+1$

$$(\omega+1)^2 = (\omega+1)\cdot(\omega+1) = (\omega+1)\cdot\omega+\omega+1 = \omega^2+\omega+1$$

- $(\omega+1)^2\cdot 2$
- $(\omega+1)^2\cdot n$ con $n\in\omega\setminus\{0\}$
- $(\omega+1)^2\cdot\omega$
- $(\omega+1)^3$
- $(\omega+1)^n$ con $n\in\omega$
- $(\omega+1)^\omega$

ALTRI ESERCIZI (CIRCA IN ORDINE DI DIFFICOLTÀ)

FINO DELLA LEZIONE PRECEDENTE

Non bisogna pensare che il teorema della forma normale ci dica che tutti gli ordinali sono esprimibili come "polinomi esponenziali in ω"

$$\omega^{\omega^{\omega^2+1}+\omega^{\omega\cdot 17}+\omega} + \omega^{\omega^2+\omega}\cdot 94 + \omega^{\omega\cdot 37+\omega^{\omega\cdot 36}\cdot 52}\cdot 21 + \dots$$

o roba del genere. Vediamo ora un esempio sorprendente.

Def Una funzione classe $F: Ord \to Ord$ crescente è **continua** se per ogni λ limite $F(\lambda) = \sup F[\lambda]$.

Esempio Per ogni α fissato, le funzioni $\beta \mapsto \alpha + \beta$, $\beta \mapsto \alpha \cdot \beta$, $\beta \mapsto \alpha^\beta$ sono crescenti e continue.

Prop. Sia $F : Ord \to Ord$ crescente e continua, allora F ha un punto fisso (ossia $\exists \pi \in Ord \ F(\pi) = \pi$)

Dim Definiamo per ricorsione $\pi_0 = 0$ $\pi_{n+1} = F(\pi_n)$ per ogni $n \in \omega$. Sia $\pi = \sup \{ \pi_n \mid n \in \omega \}$.

Se $F(0) = 0$, allora $\pi = 0$ è un punto fisso.

Se $0 < F(0)$, allora, per induzione, $\forall n \ \pi_n < \pi_{n+1}$, per cui la funzione $n \longmapsto \pi_n$ è crescente. Di conseguenza π è limite (se $\pi = \gamma + 1$, allora $\pi_n = \gamma$ per qualche n, tuttavia $\pi_n < \pi_{n+1} < \pi_{n+2}$, per cui $\pi = \pi_n + 1 < \pi_n + 2 \leq \pi_{n+2}$). Quindi

$$F(\pi) = \sup F[\pi] \leq \sup \{ F(\pi_n) \mid n \in \omega \} = \sup \{ \pi_{n+1} \mid n \in \omega \} = \pi$$

E la disuguaglianza opposta $F(\pi) \geq \pi$ vale perché F è crescente ☐

Esempio Sia ε un punto fisso di $x \mapsto \omega^x$, allora la forma normale di ε è $\varepsilon = \omega^\varepsilon$.

Esercizio Sia $\varepsilon_0 = \sup \{ 1, \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots \}$

Formalmente definiamo per ricorsione $\alpha_0 = 1$ $\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$, allora $\varepsilon_0 \overset{\text{def.}}{=} \sup \{ \alpha_n \mid n \in \omega \}$. Dimostrare che ε_0 è il più piccolo punto fisso della funzione $x \mapsto \omega^x$.

Esercizio Sia $F : Ord \to Ord$ crescente continua. Allora esiste $G : Ord \to Ord$ crescente tale che

$$\alpha \text{ è p.ti fisso di } F \iff \exists \beta \in Ord \ \alpha = G(\beta)$$

Esercizio La ω dell'esercizio precedente è univocamente determinata da F e continua.

Def (ε-number, per curiosità)
Se negli esercizi precedenti $F(\alpha) = \omega^\alpha$, allora

$$\varepsilon_\alpha \overset{\text{def.}}{=} \omega(\alpha).$$

L'α-esimo ε-number ε_α è l'α-esimo punto fisso di $x \to \omega^x$.

La forma normale di Cantor

Lemma (sottrazione di ordinali)
Siano α, γ ordinali con $\alpha \leq \gamma$. Allora esiste un unico β t.c. $\gamma = \alpha + \beta$.

Dim Abbiamo l'unicità perché la funzione $+$ è crescente nel secondo argomento. Consideriamo il minimo δ t.c. $\gamma < \alpha + \delta$ — un siffatto δ esiste poiché $\gamma < \alpha + (\gamma + 1)$. Se δ è successore, sia $\delta = \beta + 1$. Allora $\alpha + \beta \leq \gamma < \alpha + \beta + 1$, quindi $\gamma = \alpha + \beta$.
Ci basta quindi mostrare che δ non è limite (ovviamente non è 0). Se lo fosse, $\gamma < \alpha + \delta = \sup\{\alpha + \varepsilon \mid \varepsilon < \delta\}$, ma allora esiste $\varepsilon < \delta$ t.c. $\gamma < \alpha + \varepsilon$. ↯ □

Lemma (divisione euclidea di ordinali)
Siano α, γ ordinali con $\alpha \neq 0$. Allora esistono un unico β ed un unico $\rho < \alpha$ tali che $\gamma = \alpha \cdot \beta + \rho$

Dim Unicità: per il lemma precedente, basta dimostrare che β è unico. Supponiamo per assurdo $\gamma = \alpha \cdot \beta_1 + \rho_1 = \alpha \cdot \beta_2 + \rho_2$

con $\beta_1, \beta_2 < \alpha$ e, senza perdita di generalità $\beta_1 < \beta_2$.

Allora $\alpha \cdot \beta_1 + \rho \leq \alpha \cdot \beta_1 + \alpha = \alpha(\beta_1 + 1) \leq \alpha \cdot \beta_2$. ↯

Esistenza: Sia δ minimo tale che $\gamma < \alpha \cdot \delta$ — esiste perché $\gamma < \gamma + 1 \leq \alpha \cdot (\gamma + 1)$. Se δ è successore, sia $\delta = \beta + 1$, allora $\alpha \cdot \beta \leq \gamma$ per la minimalità di δ, quindi esiste ρ tale che $\alpha \cdot \beta + \rho = \gamma$. Per concludere il caso di δ successore, ci basta dimostrare che $\rho < \alpha$. Se, per assurdo, $\alpha \leq \rho$ allora

$\alpha \cdot \delta = \alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha \leq \alpha \cdot \beta + \rho = \gamma$ contro $\gamma < \alpha \cdot \delta$ ↯

Resta da escludere che δ sia limite. Se lo fosse

$\gamma < \alpha \cdot \delta = \sup\{\alpha \cdot \varepsilon \mid \varepsilon < \delta\}$ quindi $\gamma < \alpha \cdot \varepsilon$ per qualche $\varepsilon < \delta$ ↯

Teo (forma normale di Cantor)

Ogni ordinale α può essere espresso in maniera unica come somma finita

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

con $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n$ ordinali e $k_1, k_2, \dots, k_n \in \omega \setminus \{0\}$.

Dim

Esistenza: Per induzione transfinita, supponiamo che ogni ordinale $< \alpha$ abbia una forma normale, dobbiamo dimostrare che α ha una forma normale. Sia γ minimo tale che $\alpha < \omega^\gamma$ — c'è perché $\alpha < \omega^{\alpha+1}$. Come nei lemmi precedenti, se γ è successore scriviamo $\gamma = \beta_1 + 1$. Allora

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \rho$$

con $\rho < w^{\gamma_1}$. Osserviamo intanto che $0 < k_1 < w$. Infatti

$0 = k_1 \Rightarrow \alpha = \rho < w^{\gamma_1}$ contro la minimalità di γ ↯

$w \leq k_1 \Rightarrow w^{\gamma} = w^{\gamma_1+1} \leq w^{\gamma_1} \cdot k_1 + \rho = \alpha$ ↯

Scriviamo ora, per l'ipotesi induttiva $\rho < w^{\gamma_1} \leq \alpha$ come

$$\rho = w^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots + w^{\beta_n} k_n$$

Siccome $\rho < w^{\gamma_1}$, abbiamo $\beta_2 < \gamma_1$. Quindi

$$\alpha = w^{\gamma_1} \cdot k_1 + \rho = w^{\gamma_1} \cdot k_1 + w^{\beta_2} \cdot k_2 + \dots + w^{\beta_n} \cdot k_n$$

è una forma normale.

Unicità: Sia α minimo che non ha un'unica forma normale.

$$\alpha = w^{\beta_1} \cdot k_1 + w^{\gamma_2} \cdot k_2 + \dots + w^{\gamma_n} k_n$$
$$= w^{\gamma_1'} k_1' + w^{\gamma_2'} \cdot k_2' + \dots + w^{\beta_{n'}'} k_{n'}'$$

Ci basta dire che $\beta_1 = \gamma_1'$ e $k_1 = k_1'$, infatti allora

$$w^{\gamma_2} \cdot k_2 + \dots + w^{\gamma_n} k_n = w^{\gamma_2'} \cdot k_2' + \dots + w^{\beta_{n'}'} k_{n'}' < w^{\gamma_1}$$

contro la minimalità di α.

Supponiamo $\gamma_1 = \gamma_1'$, allora $w^{\beta_1} \cdot k_1 + \underbrace{\dots}_{< w^{\gamma_1}} = w^{\beta_1} \cdot k_1' + \underbrace{\dots}_{< w^{\gamma_1}}$ quindi $k_1 = k_1'$ per la divisione euclidea.

Se infine $\beta_1 < \gamma_1'$ abbiamo

$w^{\beta_1} \cdot k_1 + w^{\gamma_2} \cdot k_2 + \dots + w^{\gamma_n} k_n < w^{\beta_1+1} \leq w^{\gamma_1'} k_1' + \dots$ ↯

esercizio: dimostrare le disuguaglianze in viola (sono tutte uguali). □

I primi due esercizi seguenti saranno assai più facili quando, usando l'assioma della scelta, dimostreremo che l'unione di un

insieme numerabile di insiemi numerabili è numerabile

Esercizio * difficile (senza leggere l'idea qua sotto) $|\varepsilon_0| = \aleph_0$

Idea: dimostrare che $\alpha < \varepsilon_0$ se e solo se α può essere scritto a partire da $0, 1, \omega$, applicando le operazioni di somma, prodotto, ed esponente ordinale un numero finito di volte.

Esercizio ** ostico Sia ζ_0 minimo t.c. $\varepsilon_{\zeta_0} = \zeta_0$, allora $|\zeta_0| = \aleph_0$.

Esercizio Sia γ un qualunque ordinale ≥ 2. Ogni ordinale α si scrive in modo unico come somma finita

$$\alpha = \gamma^{\beta_1} k_1 + \dots + \gamma^{\beta_n} k_n$$

con $\beta_1 > \dots > \beta_n$ e $k_1, \dots k_n < \gamma$.

Esercizio (che è anche un'utile proposizione da ricordare)
Siano $\alpha < \omega^\gamma$ e $\omega^\gamma \leq \beta$, allora $\alpha + \beta = \beta$.

Soluzione $\alpha < \omega^\gamma \Rightarrow \alpha \leq \omega^\delta \cdot k$ per qualche $\delta < \gamma$ e $k < \omega$.
Infatti, scrivendo α in forma normale, abbiamo

$$\alpha = \omega^{\delta_1} \cdot k_1 + \dots + \omega^{\delta_n} k_n \leq \omega^{\delta_1} (k_1 + \dots + k_n)$$

L'ipotesi $\alpha < \omega^\gamma$ implica $\delta_1 < \gamma$, per cui basta prendere $\delta = \delta_1$ e $k = k_1 + \dots + k_n$.
Ora, siccome $\beta \geq \omega^\gamma \geq \omega^{\delta+1}$, possiamo scrivere $\beta = \omega^{\delta+1} + \beta'$.
Per cui $\beta \leq \alpha + \beta \leq \omega^\delta \cdot k + \omega^{\delta+1} + \beta' = \omega^\delta \underbrace{(k + \omega)}_{= \omega} + \beta' = \omega^{\delta+1} + \beta' = \beta$

Dove l'uguaglianza $k + \omega = \omega$ segue facilmente per induzione dall'identità $1 + \omega = \omega$.