Esercizio (che è anche un'utile proposizione da ricordare)

Siano $\alpha < \omega^\gamma$ e $\omega^\delta \leq \beta$, allora $\alpha + \beta = \beta$.

Soluzione $\alpha < \omega^\gamma \Rightarrow \alpha \leq \omega^\delta \cdot k$ per qualche $\delta < \gamma$ e $k < \omega$.

Infatti, scrivendo α in forma normale, abbiamo

$$\alpha = \omega^{\delta_1} \cdot k_1 + \ldots + \omega^{\delta_n} k_n \leq \omega^{\delta_1} (k_1 + \ldots + k_n)$$

L'ipotesi $\alpha < \omega^\gamma$ implica $\delta_1 < \gamma$, per cui basta prendere $\delta = \delta_1$ e $k = k_1 + \ldots + k_n$.

Ora, siccome $\beta \geq \omega^\gamma \geq \omega^{\delta+1}$, possiamo scrivere $\beta = \omega^{\delta+1} + \beta'$.

Per cui $\beta \leq \alpha + \beta \leq \omega^\delta \cdot k + \omega^{\delta+1} + \beta' = \omega^\delta \underbrace{(k + \omega)}_{= \omega} + \beta' = \omega^{\delta+1} + \beta' = \beta$

Dove l'uguaglianza $k + \omega = \omega$ segue facilmente per induzione dall'identità $1 + \omega = \omega$. ∎

Prop (regole di calcolo in forma normale)

Per la somma ($c \neq 0$, $d \neq 0$):

$$\omega^\alpha \cdot c + \omega^\beta \cdot d = \begin{cases} \omega^\beta \cdot d & \text{se } \alpha < \beta \\ \omega^\alpha (c + d) & \text{se } \alpha = \beta \\ \omega^\alpha \cdot c + \omega^\beta \cdot d & \text{se } \beta < \alpha \end{cases}$$

già in forma normale

Per i prodotti si applica la proprietà distributiva, poi

$\beta > 0 \rightarrow (\omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot k_2 + \ldots) \cdot \omega^\beta = \omega^{\alpha_1 + \beta}$

$n \in \omega \setminus \{0\} \rightarrow (\omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot k_2 + \ldots) \cdot n = \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 n + \omega^{\alpha_2} \cdot k_2 + \omega^{\alpha_3} \cdot k_3 + \ldots$

Per la potenza si usano $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$ e $\alpha^{\beta \cdot n} = (\alpha^\beta)^n$, poi

$$k^{\omega^{1+\alpha}} = \omega^{\omega^\alpha}$$

$\beta > 0 \wedge \alpha_1 > 0 \rightarrow (\omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot k_2 + \ldots)^{\omega^\beta} = \omega^{\alpha_1 \cdot \omega^\beta}$

Dim

La regola per la somma è immediata.

Per dimostrare

$$\beta > 0 \to \left(\omega^{\alpha_1}\cdot k_1 + \omega^{\alpha_2}\cdot k_2 + \dots\right)\cdot \omega^{\beta} = \omega^{\alpha_1+\beta}$$

osserviamo intanto il caso particolare $n\cdot\omega = n$ per $n\in\omega\setminus\{0\}$.

$$\omega \le n\cdot\omega = \sup\{n\cdot i \mid i\in\omega\} \le \sup\{\sigma \mid \sigma\in\omega\} \le \omega$$

Ora, scrivendo $\beta = 1+\gamma$

$$\omega^{\alpha_1+\beta} = \omega^{\alpha_1}\omega^{\beta} \le \left(\omega^{\alpha_1}\cdot k_1 + \omega^{\alpha_2}\cdot k_2 + \dots\right)\cdot\omega^{\beta} \le \left(\omega^{\alpha_1}\cdot k_1 + \dots + \omega^{\alpha_1}\right)\cdot\omega^{\beta} \le$$

$$\le \omega^{\alpha_1}(k_1+1)\,\omega^{\beta} \le \omega^{\alpha_1}\underbrace{(k_1+1)\,\omega}_{\omega}\,\omega^{\gamma} = \omega^{\alpha_1}\cdot\omega\cdot\omega^{\gamma} = \omega^{\alpha_1+\beta}$$

La regola

$$n\in\omega\setminus\{0\} \to \left(\omega^{\alpha_1}\cdot k_1 + \omega^{\alpha_2}\cdot k_2 + \dots\right)\cdot n = \omega^{\alpha_1}\cdot k_1 n + \omega^{\alpha_2}\cdot k_2 + \omega^{\alpha_3}\cdot k_3 + \dots$$

si ottiene facilmente per induzione su n.

Questa è immediata: $k^{\omega\cdot\alpha} = k^{\omega\cdot\omega^{\alpha}} = \left(\sup\{k^n \mid n\in\omega\}\right)^{\omega^{\alpha}} = \omega^{\omega^{\alpha}}$

Per dimostrare

$$\beta > 0 \wedge \alpha_1 > 0 \to \left(\omega^{\alpha_1}\cdot k_1 + \omega^{\alpha_2}\cdot k_2 + \dots\right)^{\omega^{\beta}} = \omega^{\alpha_1\cdot\omega^{\beta}}$$

partiamo dal caso particolare $\left(\omega^{\alpha}\cdot k\right)^{\omega} = \omega^{\alpha\omega}$.

$$\omega^{\alpha\cdot\omega} \le \left(\omega^{\alpha}\cdot k\right)^{\omega} = \sup\left\{\left(\omega^{\alpha}\cdot k\right)^{n} \mid n\in\omega\right\} = \sup\left\{\omega^{\alpha\cdot n}\cdot k \mid n\in\omega\right\} \le$$

$$\le \sup\left\{\omega^{\alpha(n+1)} \mid n\in\omega\right\} \le \left(\omega^{\alpha}\right)^{\omega} = \omega^{\alpha\cdot\omega}$$

Siccome $\beta > 0$ scriviamo $\beta = 1+\gamma$, quindi abbiamo $\omega^{\beta} = \omega\cdot\gamma$

$$\omega^{\alpha_1\cdot\omega^{\beta}} \le \left(\omega^{\alpha_1}\cdot k_1 + \omega^{\alpha_2}\cdot k_2 + \dots\right)^{\omega^{\beta}} \le \left(\omega^{\alpha_1}(k_1+1)\right)^{\omega\cdot\gamma} = \omega^{\alpha_1\cdot\omega\cdot\gamma} = \omega^{\alpha_1\cdot\omega^{\beta}}$$

□

Esempi:

- $(w+1)^2 = (w+1)\cdot(w+1) = (w+1)\cdot w + w + 1 = w^2 + w + 1$
- $(w+1)^2 \cdot n = w^2 \cdot n + w + 1$ con $n \in \mathbb{W} \setminus \{0\}$
- $(w+1)^2 \cdot w = (w^2 + w + 1)\cdot w = w^3$
- $(w+1)^3 = (w^2+w+1)(w+1) = (w^2+w+1)\cdot w + w^2 + w + 1 = w^3 + w^2 + w + 1$
- $(w+1)^n = w^n + w^{n-1} + \dots + 1 = \sum_{i=n}^{0} w^i$ con $n \in \mathbb{W}$

  Per induzione su n. Il passo induttivo è come segue

$$(w+1)^{n+1} = (w+1)^n (w+1) = \left(\sum_{i=n}^{0} w^i\right) w + \sum_{i=n}^{0} w^i = w^{n+1} + \sum_{i=n}^{0} w^i = \sum_{i=n+1}^{0} w^i$$

- $(w+1)^w = w^w$ applicando direttamente la regola.
- $(2\cdot w^2 + w\cdot 3 + 7)^3$ esame del 27.1.2020

$$(w^2 + w\cdot 3 + 7)^3 = (w^2 + w\cdot 3 + 7)\cdot(w^2 + w\cdot 3 + 7)\cdot(w^2 + w\cdot 3 + 7) =$$

$$(\,)\cdot w^2 + (\,)\cdot w\cdot 3 + (\,)\cdot 7 =$$

$$= w^4 + w^3\cdot 3 + w^2\cdot 7 + w\cdot 3 + 7$$

$$= (w^4 + \dots)\, w^2 + (w^4 + \dots)\, w\cdot 3 + (w^4 + \dots)\cdot 7$$

$$= w^6 + w^5\cdot 3 + w^4\cdot 7 + w^3\cdot 3 + w^2\cdot 7 + w\cdot 3 + 7$$

Gli alef

Def L'ordinale α è iniziale se $\forall \beta < \alpha \ |\beta| < |\alpha|$

Esempi I numeri finiti e ω sono ordinali iniziali

Prop Sia X un insieme ben ordinabile, allora esiste un unico ordinale iniziale k tale che $|X| = |k|$.

Dim L'unicità è ovvia, infatti due ordinali iniziali $k_1 < k_2$ non possono essere equipotenti, poiché $\forall \beta < k_2 \ |\beta| < |k_2|$.

Esistenza: Sia $<$ un buon ordine su X e un ordinale $\simeq (X, <)$. Consideriamo $k = \min \{\beta \in \alpha + 1 \mid |X| = |\beta|\}$ — questo insieme non è vuoto in quanto $|\alpha| = |X|$. Se k non fosse iniziale esisterebbe $\beta < k$ con $|\beta| = |k| = |X|$ contro la minimalità di k. ∎

Vedremo che una forma equivalente dell'assioma della scelta è appunto che ogni insieme è ben ordinabile.

Prop Dato un insieme X esiste un ordinale α con la proprietà che non esistono funzioni iniettive $\alpha \to X$.

Dim Consideriamo l'insieme

$$Y = \{R \in \mathcal{P}(X \times X) \mid \exists X' \subseteq X \ R \text{ è un b.o. su } X'\}$$

Sia $F : Y \to Ord$ la funzione classe che associa ad ogni buon ordinamento $R \in Y$ l'unico ordinale $\simeq R$. Sia α un ordinale $\notin F[Y]$. Se, per assurdo esistesse $f : \alpha \to X$ iniettiva, allora $< = \{(f(\beta), f(\gamma)) \mid \beta < \gamma < \alpha\}$ sarebbe un b.o. su $f[\alpha]$ isomorfo ad α. ∎

Oss Se $\alpha, \beta \in Ord$ allora $|\alpha| \leq |\beta| \vee |\beta| \leq |\alpha|$

"Le cardinalità degli ordinali sono sempre confrontabili"

Dim $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha \subseteq \beta \Rightarrow |\alpha| \leq |\beta|$ e $\beta \leq \alpha \Rightarrow \dots |\beta| \leq |\alpha|$

Esempio Esiste $\alpha \in Ord$ con $|\alpha| > \aleph_0$

Dim Sia α t.c. non esiste $f: \alpha \to \omega$ iniettiva. Se, per assurdo $|\alpha| \leq \aleph_0$, allora:

o $|\alpha| = \aleph_0$, quindi c'è una bigezione $\alpha \to \omega$ ↯

o $|\alpha| = k \in \omega$, quindi c'è una bigezione $\alpha \to k \subseteq \omega$ ↯ □

Def. Dato un insieme X, il numero di Hartogs di X, $H(X)$ è il più piccolo ordinale che non è equipotente ad alcun sottoinsieme di X.

Nota: Per la proposizione, un siffatto ordinale esiste, e la minimalità implica che è univocamente definito. Quindi la funzione di Hartogs $H: V \to Ord$ è una funzione classe. Inoltre $H(X)$ è automaticamente iniziale per ogni X.

Il nostro scopo è ora di costruire una funzione classe $\omega_\square : Ord \to Ord$, $\alpha \mapsto \omega_\alpha$ che elenca gli ordinali iniziali infiniti.

Osservazione Per α, β ordinali $\beta < H(\alpha) \iff |\beta| \leq |\alpha|$

ossia $H(\alpha)$ è il più piccolo ordinale tale che $|\alpha| < |H(\alpha)|$.

Dim → Se $\beta < H(\alpha)$, esiste $A \subseteq \alpha$ t.c. $|\beta| = |A|$, quindi $|\beta| \leq |\alpha|$.

← Procediamo per assurdo $|\alpha| < |H(\alpha)|$, quindi $|\beta| < |H(\alpha)|$ e $\beta < H(\alpha)$

$H(\alpha) \leq \beta \overset{H(\alpha) \text{ è iniziale}}{\Rightarrow} |H(\alpha)| \leq |\beta| \overset{\text{ip. } |\beta| \leq |\alpha|}{\Rightarrow} |H(\alpha)| \leq |\alpha|$ ↯ □