Gli alef

Def L'ordinale α è iniziale se $\forall \beta < \alpha \ |\beta| < |\alpha|$

Esempi I numeri finiti e ω sono ordinali iniziali

Prop Sia X un insieme ben ordinabile, allora esiste un unico ordinale iniziale k tale che $|X| = |k|$.

Dim L'unicità è ovvia, infatti due ordinali iniziali $k_1 < k_2$ non possono essere equipotenti, poiché $\forall \beta < k_2 \ |\beta| < |k_2|$.

Esistenza: Sia $<$ un buon ordine su X e un ordinale $\simeq (X, <)$. Consideriamo $k = \min \{\beta \in \alpha + 1 \mid |X| = |\beta|\}$ — questo insieme non è vuoto in quanto $|\alpha| = |X|$. Se k non fosse iniziale esisterebbe $\beta < k$ con $|\beta| = |k| = |X|$ contro la minimalità di k. ∎

Vedremo che una forma equivalente dell'assioma della scelta è appunto che ogni insieme è ben ordinabile.

Prop Dato un insieme X esiste un ordinale α con la proprietà che non esistono funzioni iniettive $\alpha \to X$.

Dim Consideriamo l'insieme

$$Y = \{R \in \mathcal{P}(X \times X) \mid \exists X' \subseteq X \ R \text{ è un b.o. su } X'\}$$

Sia $F : Y \to Ord$ la funzione classe che associa ad ogni buon ordinamento $R \in Y$ l'unico ordinale $\simeq R$. Sia α un ordinale $\notin F[Y]$. Se, per assurdo esistesse $f : \alpha \to X$ iniettiva, allora $< = \{(f(\beta), f(\gamma)) \mid \beta < \gamma < \alpha\}$ sarebbe un b.o. su $f[\alpha]$ isomorfo ad α. ∎

Oss Se $\alpha, \beta \in Ord$ allora $|\alpha| \leq |\beta| \vee |\beta| \leq |\alpha|$

"Le cardinalità degli ordinali sono sempre confrontabili"

Dim $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha \subseteq \beta \Rightarrow |\alpha| \leq |\beta|$ e $\beta \leq \alpha \Rightarrow \dots |\beta| \leq |\alpha|$

Esempio Esiste $\alpha \in Ord$ con $|\alpha| > \aleph_0$

Dim Sia α t.c. non esiste $f: \alpha \to \omega$ iniettiva. Se, per assurdo $|\alpha| \leq \aleph_0$, allora:

- $|\alpha| = \aleph_0$, quindi c'è una bigezione $\alpha \to \omega$ ↯
- $|\alpha| = k \in \omega$, quindi c'è una bigezione $\alpha \to k \subseteq \omega$ ↯ □

Def. Dato un insieme X, il numero di Hartogs di X, $H(X)$ è il più piccolo ordinale che non è equipotente ad alcun sottoinsieme di X.

Nota: Per la proposizione, un siffatto ordinale esiste, e la minimalità implica che è univocamente definito. Quindi la funzione di Hartogs $H: V \to Ord$ è una funzione classe. Inoltre $H(X)$ è automaticamente iniziale per ogni X.

Il nostro scopo è ora di costruire una funzione classe $\omega_\square : Ord \to Ord$, $\alpha \mapsto \omega_\alpha$ che elenca gli ordinali iniziali infiniti.

Osservazione Per α, β ordinali $\beta < H(\alpha) \iff |\beta| \leq |\alpha|$

ossia $H(\alpha)$ è il più piccolo ordinale tale che $|\alpha| < |H(\alpha)|$.

Dim $\to$ Se $\beta < H(\alpha)$, esiste $A \subseteq \alpha$ t.c. $|\beta| = |A|$, quindi $|\beta| \leq |\alpha|$.

$\leftarrow$ Necessariamente $|\alpha| < |H(\alpha)|$, quindi $|\beta| < |H(\alpha)|$ e $\beta < H(\alpha)$ □

Osservazione L'estremo superiore di un insieme di ordinali iniziali è un ordinale iniziale.

Dim Sia S questo insieme e $\alpha = \sup S$. Se α non fosse iniziale ci sarebbe $\beta < \alpha$ iniziale con $|\beta| = |\alpha|$. Siccome α è l'estremo superiore, c'è $\gamma \in S$ con $\beta < \gamma$. Ma

$$\beta < \gamma \leq \alpha \Rightarrow \beta \subseteq \gamma \subseteq \alpha \Rightarrow |\beta| \leq |\gamma| \leq |\alpha| = |\beta| \Rightarrow |\beta| = |\gamma| \rightsquigarrow$$

perché γ è iniziale

Def

$$w_0 = \omega$$
$$w_{\alpha+1} = \aleph(w_\alpha)$$
$$w_\lambda = \sup\{w_\alpha \mid \alpha \in \lambda\} \quad \text{per } \lambda \text{ limite}$$

Teo La funzione classe $\alpha \mapsto w_\alpha$ è crescente e

$$\forall \beta \in \mathrm{Ord} \quad (\beta \text{ è iniziale}) \leftrightarrow \exists \alpha \in \mathrm{Ord} \quad \beta = w_\alpha.$$

Dim La monotonia è immediata osservando che $\forall \alpha \in \mathrm{Ord}\ \aleph(\alpha) > \alpha$. La freccia $\leftarrow$, si ha, per α successore, semplicemente perché $\aleph(\dots)$ è sempre iniziale. Per α limite, invece, perché un sup di ordinali iniziali è iniziale.

Ci resta da dimostrare che, se α è iniziale, esiste β t.c. $\alpha = w_\beta$. Siccome la funzione $x \mapsto w_x$ è crescente, $x \leq w_x$, ed esiste il minimo γ t.c. $\alpha < w_\gamma$. Per continuità γ non può essere limite, di conseguenza possiamo definire β con $\beta + 1 = \gamma$.

$$\alpha < w_{\beta+1} = \aleph(w_\beta) \Rightarrow |\alpha| \leq |w_\beta| \Rightarrow \alpha \leq w_\beta$$

D'altro canto $w_\beta \leq \alpha$ per la minimalità di γ, quindi $\alpha = w_\beta$. ∎

Notazione Usiamo il simbolo $\aleph_\alpha$ come abbreviazione per $|w_\alpha|$

Così, per esempio, X è numerabile $\iff |X| = |\overset{=w}{w_0}| \iff |X| = \aleph_0$

Prop. (Somme e prodotti di alef)

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max(\aleph_\alpha, \aleph_\beta) = \aleph_{\max(\alpha,\beta)}$$

OPERAZIONI FRA CARDINALITÀ

$$\aleph_\alpha + |n| = \aleph_\alpha \cdot |n| = \aleph_\alpha \quad \text{per } n \in w \setminus \{0\}$$

Assumiamo per un istante il seguente lemma

Lemma $\forall \alpha \in \mathrm{Ord} \quad \aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$

Dim (proposizione)

Assumiamo, senza perdita di generalità, $\alpha \leq \beta$. Allora

$$\aleph_\beta \leq \aleph_\alpha + \aleph_\beta \leq 2 \cdot \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta \leq \aleph_\beta \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$$

Inoltre $\aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha + |n| \leq \aleph_\alpha + \aleph_0 = \aleph_\alpha$

$$\aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha \cdot |n| \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_0 = \aleph_\alpha$$

∎

Oss Un ordinale iniziale infinito w_α è necessariamente limite.

Dim Se, per assurdo, $w_\alpha = \beta + 1$, allora $w \leq \beta$, altrimenti w_α sarebbe finito, di conseguenza possiamo scrivere $\beta = w + \gamma$. Quindi

$$|w_\alpha| = \underbrace{|w + \gamma + 1| = |1 + w + \gamma|}_{\text{poiché } |w \sqcup \gamma \sqcup 1| = |1 \sqcup w \sqcup \gamma|} = |w + \gamma| = |\beta| \quad \text{↯}$$

∎

Oss Se $\aleph_0 \leq |X| \leq \aleph_\alpha$ allora $\exists \beta < \alpha \ |X| = \aleph_\beta$

Dim Basta dimostrare $\exists \beta \ |X| = \aleph_\beta$. L'ipotesi $|X| \leq \aleph_\alpha$ significa che esiste $f : X \to w_\alpha$ iniettiva. Quindi X è b.o. dalla relazione $a < b \overset{\text{def.}}{\iff} f(a) < f(b)$.

∎

Dim (lemma)

Per induzione transfinita, possiamo assumere $\forall \beta < \alpha \quad \aleph_\beta^2 = \aleph_\beta$ e dobbiamo dimostrare $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$. Strategia: diamo un buon ordine $\prec$ su $w_\alpha \times w_\alpha$ in modo tale che $(w_\alpha \times w_\alpha, \prec) \sim w_\alpha$.

$$(x,y) \prec (x',y') \overset{\text{def.}}{\iff} \begin{cases} \max(x,y) < \max(x',y') \\ \max(x,y) \overset{\vee}{=} \max(x',y') \wedge y < y' \\ \max(x,y) \overset{\vee}{=} \max(x',y') \wedge y = y' \wedge x < x' \end{cases}$$

Verifichiamo intanto che $\prec$ è un buon ordine. Detto $<$ il buon ordine prodotto su $w_\alpha \times w_\alpha \times w_\alpha$ abbiamo

$$(x,y) \prec (x',y') \iff (x, y, \max(x,y)) < (x', y', \max(x',y'))$$

Il fatto che $\prec$ è transitiva, irriflessiva, un ordine totale, e un buon ordine, segue quindi dalle corrispondenti proprietà di $<$.

Resta da verificare che $X \overset{\text{def.}}{=} (w_\alpha \times w_\alpha, \prec) \sim w_\alpha$. Sia β l'ordinale di $(w_\alpha \times w_\alpha, \prec)$. Siccome $|w_\alpha| \leq |w_\alpha \times w_\alpha| = |\beta|$ e w_α è iniziale abbiamo $w_\alpha \leq \beta$, resta quindi da dimostrare che non vale $w_\alpha < \beta$. ossia che w_α non è isomorfo a un segmento iniziale proprio di X.

A tal fine fissiamo un s.i. proprio $X_{(x,y)}$ di X, e dimostriamo $|X_{(x,y)}| < \aleph_\alpha$ —— quindi, necessariamente, $X_{(x,y)} \not\sim w_\alpha$.

Sia $\mu = \max(x,y)$. Siccome $\mu < w_\alpha$ e w_α è iniziale, $\mu + 1 < w_\alpha$, quindi $|\mu+1| < \aleph_\alpha$. Ora, o $|\mu+1| = \aleph_\gamma$ per qualche γ o è finito. Nel primo caso $|(\mu+1) \times (\mu+1)| = \aleph_\gamma^2 = \aleph_\gamma$ per ipotesi induttiva, e, comunque $|(\mu+1) \times (\mu+1)| < \aleph_\alpha$. Tuttavia $X_{(x,y)} \subseteq (\mu+1) \times (\mu+1)$. ☒

Esercizi:

- Per $n \in \omega$ sia $\mathcal{P}^n(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid |Y| = n\}$
  $\forall n \in \omega \quad |\mathcal{P}^n(\omega_\alpha)| = \aleph_\alpha$
- $|\bigcup \{\mathcal{P}^n(\omega_\alpha) \mid n \in \omega\}| = \aleph_\alpha$
  Suggerimento: $|\text{sottoins. finiti di } \omega_\alpha| \leq |\{f : n \to \alpha \mid n \in \omega\}|$
  fissa $g : \omega_\alpha \times (\omega_\alpha \cup \{\clubsuit\}) \to \omega_\alpha \cup \{\clubsuit\}$ biunivoca. Definisci $h : \cdots \to \omega_\alpha$
  con $h(\emptyset) = \clubsuit$, $h(f) = g(f(0), h(x \mapsto f(x+1)))$.
- $\alpha, \beta \in Ord \quad |\alpha| = |\beta| = \aleph_\gamma \longrightarrow |\alpha + \beta| = |\alpha \cdot \beta| = |\alpha^\wedge| = \aleph_\gamma$.
- Se $|X| = \aleph_\alpha$ e $f : X \to Y$ è una funzione, $|f[X]| \leq \aleph_\alpha$.
- Se $|X \cup Y| = \aleph_\alpha$ e $|Y| < \aleph_\alpha$ allora $|X| = \aleph_\alpha$.
- $\aleph_{\alpha+1} < 2^{2^{\aleph_\alpha}}$