Dimostrazione del teorema di ricorsione transfinita

Teo (ricorsione transfinita)
Data una funzione classe $G: V \to V$ esiste un'unica* funzione classe $F: Ord \to V$ tale che

$$\forall \alpha \in Ord \quad F(\alpha) = G(F_{|\alpha})$$

*ossia date F, F' come sopra, vale $\forall \alpha \in Ord \; F(\alpha) = F'(\alpha)$.

Dim. L'idea è definire una funzione classe $H: Ord \to V$ in modo tale che $H(\alpha) = F_{|\alpha}$* (occhio: questa F non è un dato, è la funzione che vogliamo costruire!) Poi, semplicemente

$$F(\alpha) = y \overset{def.}{\equiv} \exists f \; f = H(\alpha+1) \wedge y = f(\alpha) \qquad (*)$$

Cominciamo con la definizione di H

$$f = H(\alpha) \overset{def.}{\equiv} \begin{cases} f \text{ è una funzione} \\ Dom(f) = \alpha \\ \forall \beta < \alpha \quad f(\beta) = G(f_{|\beta}) \end{cases}$$

Verifichiamo che H è una funzione classe $Ord \to V$, ossia che $\forall \alpha \in Ord \; \exists! f \; f = H(\alpha)$ per induzione transfinita su α.

- caso 0: chiaramente $H(0) = f \rightsquigarrow f = \emptyset$.
- caso $\alpha+1$: per ipotesi induttiva abbiamo un'unica $f = H(\alpha)$. Per l'esistenza, osserviamo che $f' = f \cup \{(\alpha, G(f))\}$ soddisfa la condizione $f' = H(\alpha+1)$. Infatti f' è una funzione poiché $Dom\{(\alpha, G(\alpha))\} \cap Dom(f) = \emptyset$. $Dom(f') = Dom(f) \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$.

Inoltre, preso $\beta < \alpha+1$, o $\beta < \alpha$ o $\beta = \alpha$.

Nel primo caso: $f'(\beta) = f(\beta) = h(f|_\beta) = h(f'|_\beta)$

Nel secondo: $f'(\beta) = h(f) = h(f'|_\alpha) = h(f'|_\beta)$.

Per l'unicità: basta notare che $f' = H(\alpha+1) \to f'|_\alpha = H(\alpha)$, quindi $f'|_\alpha$ è univocamente determinata da α per ipotesi induttiva, ma, d'altro canto $f'(\alpha) = h(f'|_\alpha)$ è univocamente determinata da $f'|_\alpha$.

- caso limite: se λ è un ordinale limite, dimostriamo che $f \overset{def.}{=} \bigcup \{H(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$ soddisfa $f = H(\lambda)$.
  - f è una funzione. Ricordiamo che basta osservare che per ogni α $H(\alpha)$ è una funzione — per ipotesi induttiva — e che per $\alpha < \beta < \lambda$ le funzioni $H(\alpha)$ e $H(\beta)$ coincidono sull'intersezione dei loro domini. Questo avviene perché la funzione $H(\beta)|_\alpha$ soddisfa $H(\beta)|_\alpha = H(\alpha)$ e $H(\alpha)$ è unica per ipotesi induttiva.
  - $Dom(f) = \bigcup \{Dom(H(\alpha)) \mid \alpha < \lambda\} = \bigcup \{\alpha \mid \alpha < \lambda\} = \lambda$
  - Dato $\beta < \lambda$, siccome λ è limite, esiste α tra $\beta < \alpha < \lambda$
    $f(\beta) = f|_\alpha(\beta) = H(\alpha)(\beta) = h(H(\alpha)|_\beta) = h(f|_\beta)$.

È ora stabilito che H è una funzione classe $Ord \to V$.

Verifichiamo che, definita F tramite $(*)$, $F(\alpha) = h(F|_\alpha)$.

Abbiamo già notato che per $\gamma < \delta$ $H(\gamma) = H(\delta)|_\gamma$. Quindi $F|_\alpha = H(\alpha+1)|_\alpha$, infatti, per ogni $\beta < \alpha$ abbiamo

$$F(\eta) = H(\beta+1)(\eta) = H(\alpha+1)|_{\eta+1}(\eta) = H(\alpha+1)(\eta)$$

Di conseguenza

$$G(F|_\alpha) = G(H(\alpha+1)|_\alpha) = H(\alpha+1)(\alpha) = F(\alpha)$$

Questo conclude la dimostrazione di esistenza di F. L'unicità si ottiene per induzione transfinita (v. 1). Supponiamo infatti che F_1 e F_2 soddisfino la ricorsione $F_i(\alpha) = G(F_i|_\alpha)$, allora:

$$\forall \beta < \alpha \; F_1(\eta) = F_2(\eta) \longrightarrow F_1|_\alpha = F_2|_\alpha$$

$$\longrightarrow F_1(\alpha) = G(F_1|_\alpha) = G(F_2|_\alpha) = F_2(\alpha)$$

Quindi $\forall \alpha \; F_1(\alpha) = F_2(\alpha)$ ☐