L'assioma della scelta

Consideriamo le seguenti affermazioni

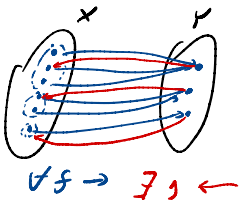
Assioma della scelta (AC)

$$\forall S\ (\forall x \in S\ x \neq \emptyset) \to \exists f : S \to \bigcup(S)\ \forall x \in S\ f(x) \in x$$

Per ogni insieme S di insiemi non vuoti esiste una funzione di scelta per S, ossia una funzione f che ha come dominio S, tale che $\forall x \in S\ f(x) \in x$

Nota: AC equivale all'affermazione che ogni funzione surgettiva ha un'inversa destra, ossia

$$\forall f : X \to Y \text{ surgettiva } \exists g : Y \to X\ f \circ g = Id$$



Dim.

($\to$) Consideriamo

$$Z = \{ A \in \mathcal{P}(X) \mid \exists y \in Y\ \underbrace{\forall x \in X\ x \in A \leftrightarrow f(x) = y}_{A = f^{-1}(y)} \}$$

Per la suriettività di f gli elementi di Z non sono vuoti; per AC esiste $h : Z \to X$ funzione di scelta. Definiamo

$g(y) \overset{\text{def}}{=} h(f^{-1}(y))$ — più precisamente $g(y) = h(\{x \in X \mid f(x) = y\})$

$f(g(y)) = f(x')$ dove $x' \in f^{-1}(y)$, ossia $f(x') = y$, quindi $f(g(y)) = y$.

($\leftarrow$) Sia X un insieme di insiemi non vuoti, consideriamo l'insieme $X' = \{(a, A) \in (\bigcup X) \times X \mid a \in A\}$ La funzione

$$f : X' \to X$$
$$(a, A) \longmapsto A$$

è surgettiva, quindi ammette un'inversa destra g.

Ora, la funzione $h: X \to V(X)$

$A \mapsto$ prima componente di $g(A)$

è una funzione di scelta per X. ∎

Teorema del buon ordinamento

$\forall S \; \exists < \in S \times S \;\; (S, <)$ è un buon ordinamento

Ogni insieme è bene ordinabile

Lemma di Zorn

Ogni insieme parzialmente ordinato in cui ogni sottocatena* ammetta un maggiorante* ha elementi massimali.*

* Definizioni: Dato $(S, <)$ ordine parziale

- una sottocatena è un $A \subseteq S$ tale che la restrizione di $<$ ad A è un ordine totale
- un maggiorante di $A \subseteq S$ è un $x \in S$ tale che $\forall y \in A \; y \leq x$
- $x \in S$ è un elemento massimale se $\neg \exists y \in S \; x < y$

Tre

Le tre affermazioni precedenti sono equivalenti — ossia si implicano vicendevolmente.

Dim (Buon ordinamento → AC)

Dato S insieme di insiemi non vuoti, fissiamo un buon ordinamento $\prec$ su $\bigcup S$. Allora la funzione $f: S \to \bigcup S$

$x \mapsto \min_{\prec}(x)$

è una funzione di scelta per S. ∎

Dim (AC → Buon ordinamento — IDEA)

Dimostreremo questo risultato tramite la catena di deduzioni AC → Zorn → Buon ordinamento. Tuttavia conviene studiare l'idea di una dimostrazione diretta.

Fissiamo un insieme X, per AC, esiste una funzione di scelta

$$f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$$
$$A \mapsto f(A) \in A$$

Ora vorremmo mettere in ordine gli elementi di X così

$x_0 = f(X)$ $x_1 = f(X \setminus \{x_0\})$ $x_2 = f(X \setminus \{x_0, x_1\})$ ...

ogni volta scegliendo un elemento nuovo fra quelli che ancora rimangono da elencare. Chiaramente, non è detto che questo procedimento termini in una quantità numerabile di passi, per cui dovremo definire $x_\omega = f(X \setminus \{x_0, x_1, x_2, \dots\})$ e, più in generale, per ricorsione transfinita

$$x_\alpha = f(X \setminus \{x_\beta \mid \beta < \alpha\})$$

Se supponiamo, per assurdo, che X non sia l'immagine di un ordinale, allora $X \setminus \{x_\beta \mid \beta < \alpha\}$ è necessariamente sempre non vuoto, per cui la costruzione ricorsiva ha senso. Ora, però avremmo una funzione iniettiva $Ord \to X$, $\alpha \mapsto x_\alpha$, e questa non può esistere per il teorema di Hartogs — infatti non c'è neppure una funzione iniettiva $H(X) \to X$. Così cade l'ipotesi assurda, e X è ben ordinabile. ∎

Dim (Zorn → Buon ordinamento)

Vogliamo dimostrare che un insieme S è ben ordinabile. Consideriamo

$T = \{\text{funzioni iniettive da un ordinale a } S\}$

$= \{f \in \mathcal{P}(H(S)\times S) \mid f \text{ è una funzione iniettiva} \wedge Dom(f) \in Ord\}$

T è parzialmente ordinato dalla relazione

$f < g \overset{def.}{\iff} Dom(f) < Dom(g) \wedge f = g|_{Dom(f)}$

Se questo ordine parziale soddisfa l'ipotesi del lemma di Zorn. Dando per buona la verifica, esiste un elemento massimale f di T. Se f non fosse surgettiva, esisterebbe $y \in S \setminus Im(f)$, per cui $f' = f \cup \{(Dom(f), y)\} > f$ contro la massimalità di f. Pertanto f è una biezione, quindi S è ben ordinabile.

Verifica dell'ipotesi di Zorn. Se $P \subseteq T$ è una sottocatena, $f = \bigcup P$ è un maggiorante di P. Per controllare che f sia una funzione basta, infatti, osservare che date $g_1, g_2 \in P$ con $g_1 < g_2$,

$g_1 = g_2|_{Dom(g_1)} \Rightarrow \forall x \in Dom(g_1) \cap Dom(g_2) \quad g_1(x) = g_2(x)$

Inoltre se $f(x) = f(y)$ allora esistono $g_1, g_2 \in P$ tali che $g_1(x) = g_2(y)$, però, siccome P è una sottocatena, una fra g_1 e g_2 è $\leq$ dell'altra, poniamo $g_1 \leq g_2$. Allora $g_2(x) = g_1(x) = g_2(y)$ e $x = y$ per l'iniettività di g_2. Di conseguenza f è iniettiva.

$Dom(f) = \bigcup \{Dom(g) \mid g \in P\} \in Ord$ in quanto unione (sup) di ordinali, quindi $f \in T$. Ed, infine, per $g \in P$, $(x,y) \in g \to (x,y) \in f$, per cui $Dom(g) \subseteq Dom(f)$ e $g = f|_{Dom(g)}$, quindi f è un maggiorante di P. ∎

Dim (AC → Zorn)

Sia $(S, <)$ un insieme parzialmente ordinato. Supponiamo che ogni sottocatena di S abbia un maggiorante e che, per assurdo, S non abbia elementi massimali. Questa assunzione implica che ogni sottocatena A ammette un maggiorante stretto, ossia un $x \in S$ tale che $\forall y \in A \; y < x$ — se avessimo infatti una sottocatena che non ammette un maggiorante stretto, allora un maggiorante di quella sottocatena non potrebbe essere $<$ di alcun elemento di S, e quindi sarebbe un elemento massimale.

Denotiamo con $\mathcal{P}^{\neq\emptyset}(S)$ l'insieme delle parti non vuote di S.

Consideriamo una funzione di scelta f su $\mathcal{P}^{\neq\emptyset}(S)$.

L'idea, ora, è di costruire per induzione transfinita una funzione classe crescente $F : Ord \to S$ — che chiaramente non può esistere perché altrimenti $F_{|H(S)}$ sarebbe un'immersione di $H(S)$ in S. Vorremmo costruire F tramite la ricorsione:

$$F(\alpha) = f(\{\text{maggioranti stretti di } F[\alpha]\})$$

perché questa costruzione abbia senso, conviene che $F_{|\alpha}$ sia crescente, in questo modo $F[\alpha]$ è una sottocatena, per cui l'insieme dei maggioranti stretti non è vuoto, ed ha senso applicare ad esso la funzione di scelta f. Per assurdo, consideriamo il minimo α tale che $F_{|\alpha}$ non è crescente. Quindi esistono $\gamma < \delta < \alpha$ tali che $F(\gamma) \not< F(\delta)$. Però siccome $\delta < \alpha$, $F_{|\delta}$

è crescente, per cui $F(\delta)$ è ben definita ed è un maggiorante stretto di $F[\delta]$, quindi, in particolare, $F(\gamma) < F(\delta)$ ✓.

Questo modo di procedere contiene, però, un'imprecisione formale. Per applicare il teorema di ricorsione transfinita alla costruzione di F dobbiamo scrivere $F(\alpha) = G(F|_\alpha)$. La G della costruzione precedente è

$$G(h) = f(\{\text{maggioranti stretti dell'immagine di } h\})$$

Questa però non è una funzione classe $V \to V$, perché non è definita se l'immagine di h non ha maggioranti stretti in S.

Il ragionamento si arrangia così: si fissa $\clubsuit \notin S$ e si definisce

$$F(\alpha) = \begin{cases} f(\{\text{magg. stretti di } F[\alpha]\}) & \text{se } F|_\alpha \text{ è } \alpha \to S \text{ crescente} \\ \clubsuit & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ora tutti i casi sono coperti ed è lecito applicare il teorema di ricorsione transfinita. Se F non fosse una funzione classe crescente $\mathrm{Ord} \to S$, ci sarebbe il minimo α tale che $F|_\alpha$ non è $\alpha \to S$ crescente, e, ragionando come prima si ottiene un assurdo.

Ricapitolando, negando la tesi, abbiamo costruito una funzione classe crescente, dunque iniettiva: $\mathrm{Ord} \to S$, che non può esistere per il teorema di Hartogs. La tesi è quindi provata. ∎