Alcune conseguenze immediate di AC

Prop Ogni insieme è equipotente ad un ordinale iniziale. In particolare, ogni cardinalità infinita è un aleph.

Dim Per il teorema del buon ordinamento ogni insieme è ben ordinabile, quindi, per le proprietà degli ordinali iniziali, equipotente ad un unico ordinale iniziale. La seconda affermazione segue dal fatto che gli ω_α — gli ordinali che definiscono le cardinalità $\aleph_\alpha$ — sono tutti e soli gli ordinali iniziali infiniti ∎

Oss Viceversa, in assenza di AC, assumere che ogni insieme è equipotente ad un ordinale implica AC.

Dim Dal fatto ogni X è equipotente ad un ordinale deduciamo il teorema del buon ordinamento. Se $|X| = |\alpha|$ con $\alpha \in Ord$, è una biiezione fra X e α, quindi un buon ordinamento di X. ∎

Cor Tutte le cardinalità sono confrontabili

$$\forall X, Y \quad |X| < |Y| \vee |X| = |Y| \vee |Y| < |X|$$

Dim Segue dal fatto che le cardinalità degli ordinali sono confrontabili. ∎

Oss La confrontabilità delle cardinalità implica AC.

Dim Dimostriamo il teorema del buon ordinamento. Consideriamo il confronto fra $|X|$ e $|H(X)|$. Per la definizione di $H(X)$ non può valere $|H(X)| \leq |X|$. Quindi $|X| < |H(X)|$.

Ossia esiste $f: X \to H(X) \in Ord$ iniettiva. ☐

Cor $\forall X$ infinito $|X \times X| = |X|$

Dim Se $|X| = \aleph_\alpha$ abbiamo $|X \times X| = |\omega_\alpha \times \omega_\alpha| = |\omega_\alpha| = |X|$ ☐

Nota Anche $|X \times X| = |X|$ implica AC. Questo però è un teorema di Tarski che vedremo più avanti

Cor $\forall X$ X infinito $\iff \aleph_0 \leq |X|$

Ossia ogni insieme infinito ha un sottoinsieme numerabile

Dim Abbiamo già dimostrato la freccia $\leftarrow$, mentre la freccia opposta segue dal fatto che $\aleph_0$ è il minimo altro infinito. ☐

Def X è *finito secondo Dedekind* se non può essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.

Prop X è finito $\longleftrightarrow$ X è finito secondo Dedekind

Dim $\rightarrow$ risultato già dimostrato.

$\leftarrow$ Supponiamo che X non sia finito, allora $|X| = \aleph_\alpha$ per qualche α, quindi esiste $f: \omega_\alpha \to X$ biunivoca.

$$g: X \to X \setminus \{f(0)\}$$
$$x \mapsto f(1 + f^{-1}(x))$$

è una bigezione fra X e $X \setminus \{f(0)\} \subsetneq X$. ☐

Prop $0 < |X| \leq |Y| \longleftrightarrow \exists f: Y \to X$ surgettiva

Dim $\rightarrow$ Data $g: X \to Y$ iniettiva e $a \in X$, la funzione

$$f: Y \to X$$
$$y \mapsto \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{se } y \in f[X] \\ a & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è surgettiva.

← Data $f: Y \to X$ surgettiva, un'inversa destra di f è un...

Prop Se $|S| \leq \aleph_\alpha$ e $\forall A \in S \ |A| \leq \aleph_\alpha$, allora $|\bigcup S| \leq \aleph_\alpha$.

Dim. Possiamo assumere che $\emptyset \notin S$. Basta esibire una funzione surgettiva $f: \omega_\alpha \times \omega_\alpha \to \bigcup S$. Sia $g: \omega_\alpha \to S$ surgettiva. Per ipotesi, per ogni $A \in S$, l'insieme $H_A = \{h: \omega_\alpha \to A \mid h \text{ è surgettiva}\}$ è non vuoto. Sia l una funzione di scelta per $\{H_A \mid A \in S\}$. Allora

$$f: \omega_\alpha \times \omega_\alpha \to \bigcup S$$
$$(x,y) \mapsto (l(H_{g(x)}))(y) \quad \text{è surgettiva.}$$

Infatti: preso $z \in \bigcup S$, esiste $A \in S$ tale che $z \in A$, quindi esiste $x \in \omega_\alpha$ tale che $z \in g(x) = A$. Siccome $h = l(H_A)$ è surgettiva $\omega_\alpha \to A$, esiste y tale che $z = h(y) = (l(H_{g(x)}))(y)$.

Cor L'unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

Oss Sia $\mathcal{P}^{\leq n}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid |A| \leq n\}$

Se $|X| = \aleph_\alpha$ e $0 < n < \omega$, allora $|\mathcal{P}^{\leq n}(X)| = \aleph_\alpha$

Dim Per induzione $|X^n| = \aleph_\alpha$, e la funzione

$$X^n \to \{A \in \mathcal{P}(X) \mid 0 < |A| \leq n\}$$
$$f \mapsto \mathrm{Im}(f) \quad \text{è surgettiva.}$$

Esercizio Se $|X| = \aleph_\alpha$ e $0 < n < \omega$, $|\{A \in \mathcal{P}(X) \mid |A| = n\}| = \aleph_\alpha$

Prop Sia $\mathcal{P}^{fin}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid |A| < \aleph_0\}$

Se $|X| = \aleph_\alpha$, allora $|\mathcal{P}^{fin}(X)| = \aleph_\alpha$

Dim $\mathcal{P}^{fin}(X) = \bigcup \{\mathcal{P}^{\leq n} \mid n \in \omega\}$ è unione di $\aleph_0$ insiemi di cardinalità $\aleph_\alpha$.

Prop Un ordine totale $(A, <)$ è un buon ordine se e solo se non esiste una successione infinita decrescente di elementi di A.

Dim Dobbiamo dimostrare che se $(A, <)$ non è un buon ordine allora esiste una funzione $\omega \to A$, $n \mapsto a_n$ decrescente.

Sia $S \subseteq A$ un sottoinsieme non vuoto che non ha minimo, e sia $a_0 \in S$ un elemento qualunque. Consideriamo una funzione di scelta f su $\mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}$. Definiamo

$$a_{n+1} = f(\{x \in S \mid x < a_n\})$$

Siccome S non ha minimo, l'insieme a cui è applicata f non è mai vuoto, per cui la successione a_n è ben definita ∎