Alcune conseguenze di AC in matematica

Prop. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, allora

$$x \in \overline{A}^{*} \iff \exists \{x_i\}_{i \in \omega} \ \forall i \in \omega \ x_i \in A \ \lim_{i \to \infty} x_i = x$$

Dim. $^{*}\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in A \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$

$\Leftarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists i \ x_i \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ e $x_i \in A$.

$\Rightarrow$ Sia f una funzione di scelta per $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$.

Definiamo $x_i = f\left(A \cap \left]x - \frac{1}{i+1}, x + \frac{1}{i+1}\right[\right)$ ∎

Promemoria Sia V un F-spazio vettoriale.

$A \subseteq V$ è *linearmente indipendente* se per ogni $a_1 \dots a_n$ elementi di A e $x_1 \dots x_n \in F$ $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0 \leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$

$B \subseteq V$ linearmente indipendente è una *base* se dato qualunque $v \in V$ esistono $b_1 \dots b_n \in B$ $x_1 \dots x_n \in F$ t.c. $v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$.

Oss. Una base è un sottoinsieme linearmente indipendente massimale rispetto all'inclusione

Dim

$\Rightarrow$ Se B non fosse massimale ci sarebbe $v \in V$ tale che $B \cup \{v\}$ è linearmente indipendente. Ma $v = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n$ per opportuni $b_1 \dots b_n \in B$ e $x_1 \dots x_n \in F$. Quindi $B \cup \{v\}$ non è indipendente perché $b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + v(-1) = 0$

$\Leftarrow$ Sia B massimale, $v \in V$. Se $v \in B$, chiaramente $v = v \cdot 1$.

Altrimenti, per la massimalità di B, $B \cup \{v\}$ non è indip.

Di conseguenza esistono $b_1 \dots b_n \in B$ e $x_1 \dots x_n, y \in F$ tali che $x_1 b_1 + \dots + x_n b_n + y v = 0$ ma non $x_1 = \dots = x_n = y = 0$.

Se y fosse $= 0$, avremmo $x_1 = \dots = x_n = 0$ per l'indipendenza di B.

Quindi $y \neq 0$ e $v = \left(-\frac{x_1}{y}\right) b_1 + \dots + \left(-\frac{x_n}{y}\right) b_n$ ∎

Prop Ogni spazio vettoriale ha una base.

Dim Sia V uno spazio vettoriale su F. Applichiamo il lemma di Zorn all'insieme dei sottoinsiemi linearmente indipendenti di V ordinati dall'inclusione. Occorre dimostrare che l'unione di una catena di insiemi linearmente indipendenti C è linearmente indipendente.

Siano $a_1 \dots a_n \in \bigcup C$. Consideriamo $A_1 \dots A_n \in C$ tali che per ogni $i = 1 \dots n$ $a_i \in A_i$. Siccome C è una catena per inclusione, c'è un $j \in \{1 \dots n\}$ tale che A_j include tutti gli altri A_i.

Quindi $a_1 \dots a_n \in A_j$ e, siccome A_j è indipendente,

$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0 \iff x_1 = \dots = x_n = 0$ ∎

Esempio Esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

tuttavia f non è della forma $f(x) = k \cdot x$.

Dim Sia B una base di $\mathbb{R}$ come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale. Fissiamo $b_1 \in B$. Consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$$

$$x \longmapsto y_1 \text{ t.c. } \exists y_2 \dots y_n \; x = b_1 y_1 + \dots + b_n y_n.$$ ∎

Esercizio Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}$ come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale, determina $|\mathcal{B}|$.

Promemoria Una misura σ-additiva su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ è una funzione $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e, se $\{A_i\}_{i \in \omega}$ è una successione di elementi disgiunti di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ allora

$$\mu\left(\bigcup \{A_i \mid i \in \omega\}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(A_i)$$

μ si dice invariante per traslazioni se $\forall x \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$\mu(A) = \mu(\{y \in \mathbb{R} \mid y - x \in A\}) \quad \text{(i.e. } A + x\text{)}$$

Oss. (monotonia) Se $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Dim $\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(B) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.

Esercizio Esibire una misura σ-additiva ed invariante per traslazioni su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Prop Non esiste una misura σ-additiva ed invariante per traslazioni μ su $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tale che $\mu([0,1[) = 1$

Dim. Supponiamo, per assurdo, che esista μ. Cerchiamo degli insiemi disgiunti $A_i \subseteq [0,1[$ con $i \in \omega$ tali che per ogni $i, j \in \omega$ $\mu(A_i) = \mu(A_j)$ e $[0,1[= \bigcup \{A_i \mid i \in \omega\}$. Questo ci, infatti, assurdo perché se $\mu(A_i) = \mu(A_j) = 0$, allora $\mu([0,1[) = \sum_{i=0}^{\infty} 0 = 0 \neq 1$, ma se $\mu(A_i) = \mu(A_j) = k > 0$, allora $\mu([0,1[) = \sum_{i=0}^{\infty} k = +\infty \neq 1$.

Sia $i \mapsto q_i$ un'enumerazione di $\mathbb{Q}$. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}$ come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale. Possiamo assumere $b_0 = 1 \in \mathcal{B}$ — altrimenti prendiamo $b_0 \in \mathcal{B}$ e moltiplichiamo tutti

gli elementi di B per $\frac{1}{b_0}$. Definiamo

$$R_i = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = r_0 \cdot 1 + q_i \cdot b_1 + r_2 \cdot b_2 + \dots + r_n b_n \text{ con } r_0, r_2 \dots r_n \in \mathbb{Q} \}$$

$$A_i = R_i \cap [0,1[$$

Ossia $x \in R_i$ se e solo se la componente b_1 di x è q_i. Siccome la successione $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ enumera i razionali, gli insiemi $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sono una partizione di $\mathbb{R}$. Di conseguenza gli insiemi $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sono una partizione di $[0,1[$.

Dimostriamo che $\mu(A_i) = \mu(A_J)$. Siano $\delta = (q_J - q_i) b_1$, $k = \lceil \delta \rceil$

Consideriamo l'insieme $A_i + \delta$.

$$x \in R_i \iff x \in \mathrm{Span}(B \setminus \{b_1\}) + q_i b_1 \qquad = q_i b_1 + (q_J - q_i) b_1$$

$$\iff x + \delta \in \mathrm{Span}(B \setminus \{b_1\}) + q_J b_1 \iff x + \delta \in R_J$$

Quindi $A_i + \delta = (R_i + \delta) \cap [\delta, \delta + 1[= R_J \cap [\delta, \delta + 1[$

$$= \underbrace{(R_J \cap [\delta, k[)}_{\stackrel{\text{def}}{=} X_1} \cup \underbrace{(R_J \cap [k, \delta + 1[)}_{\stackrel{\text{def}}{=} X_2}$$

Similmente a prima, per $n \in \mathbb{N}$

$$x \in R_J \iff x \in \mathrm{Span}(B \setminus \{b_1, 1\}) + \mathbb{Q} + q_J b_1 \qquad \mathbb{Q} + n = \mathbb{Q}$$

$$\iff x + n \in \mathrm{Span}(B \setminus \{b_1, 1\}) + \mathbb{Q} + q_J b_1 \iff x + n \in R_J$$

Quindi $Y_1 \stackrel{\text{def}}{=} X_1 - k + 1 = R_J \cap [\delta - k + 1, 1[$

$Y_2 \stackrel{\text{def}}{=} X_2 - k = R_J \cap [0, \delta - k + 1[$

Di conseguenza $Y_1 \cap Y_2 \subseteq [\delta - k + 1, 1[\cap [0, \delta - k + 1[= \emptyset$ e

$Y_1 \cup Y_2 = R_J \cap ([\delta - k + 1, 1[\cup [0, \delta - k + 1[) = R_J \cap [0,1[= A_J$

Mettendo tutto insieme

$$\mu(A_J) = \mu(Y_1) + \mu(Y_2) = \mu(X_1) + \mu(X_2) = \mu(A_i + \delta) = \mu(A_i)$$

□

Esercizio Rimpiazzare, nell'enunciato precedente, l'intervallo $[0,1[$ con $[0,1]$, $]0,1[$, $]0,1]$.

Esercizio Una maniera alternativa di dimostrare la proposizione precedente è come segue:

- considerare la relazione di equivalenza su $[0,1[$ data da $x \sim y \overset{\text{def.}}{\iff} x - y \in \mathbb{Q}$.
- fissare un $V \subseteq [0,1[$ che contiene uno ed un solo elemento per ogni classe di equivalenza — qui si usa AC
- dimostrare $[0,1[\subseteq S \overset{\text{def.}}{=} \bigcup \{ V + r \mid r \in \mathbb{Q} \cap]-1,1[\} \subseteq [-1,2[$ per cui $1 \leq \mu(S) \leq 3$
- osservare, tuttavia, che se $\mu(V) = 0$ allora $\mu(S) = 0$ e se $\mu(V) > 0$ allora $\mu(S) = +\infty$.