Il teorema di Cantor-Bendixson

Il teorema di Cantor-Bendixson, che permette di dimostrare l'ipotesi del continuo limitatamente ai sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}$, non è tecnicamente un'applicazione di AC. Tuttavia è un esempio di come le tecniche insiemistiche — segnatamente la ricorsione transfinita — hanno conseguenze in matematica.

Promemoria Se $S \subseteq \mathbb{R}$ diciamo che $x \in \mathbb{R}$ è un *punto di accumulazione* di S se $x \in \overline{(S \setminus \{x\})}$ — ossia se esiste una successione $\{x_i\}$ di punti di $S \setminus \{x\}$ tale che $\lim_{i \to +\infty} x_i = x$.

Diciamo che $S \subseteq \mathbb{R}$ è *perfetto* se S coincide con l'insieme dei suoi punti di accumulazione.

Esempio Un intervallo chiuso è perfetto.

Esercizio Esibire un insieme perfetto non vuoto avente parte interna vuota. — $P.int. di S \stackrel{def}{=} \{x \in S \mid \exists \varepsilon > 0 \;]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq S\}$

Oss Se $S \subseteq [0,1]$ è perfetto e non vuoto allora esistono $S_1, S_2 \subseteq S$ perfetti, entrambi non vuoti, e disgiunti.

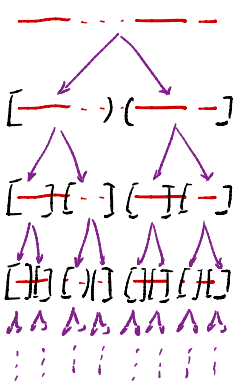
Dim Un singoletto non è perfetto, quindi esistono $x_1, x_2 \in S$ con $x_1 < x_2$. Ora si danno due casi

- Se $[x_1, x_2] \subseteq S$: consideriamo x_3, x_4 con $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$ e definiamo $S_1 = S \cap [0, x_3]$, $S_2 = S \cap [x_4, 1]$.
- Se esiste $x_3 \in [x_1, x_2] \setminus S$: definiamo $S_1 = S \cap [0, x_3[$ e $S_2 = S \cap]x_3, 1]$.

∎

Prop Se $S \subseteq [0,1]$ è perfetto allora $|S| = 2^{\aleph_0}$

Dim L'idea è di usare l'osservazione precedente per dividere l'insieme S in due, poi, ricorsivamente ciascuna delle due parti nuovamente in due, e così via. Si ottiene un albero binario di sottoinsiemi perfetti di S. Quest'albero ha $2^{\aleph_0}$ rami infiniti, uno per ogni successione di cifre binarie, e l'intersezione degli insiemi di ogni ramo è un'intersezione di compatti uno nell'altro, quindi non vuota. Per cui abbiamo una funzione iniettiva dalle successioni di cifre binarie a S.



Svolgiamo i dettagli. Sia $\mathcal{P}$ l'insieme dei sottoinsiemi perfetti di $[0,1]$. Fissiamo $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ che mappa ogni $X \in \mathcal{P}$ in una coppia $(X_1, X_2) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ con $X_1, X_2 \subseteq X$ e $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Allora possiamo assegnare ad ogni sequenza binaria finita $\alpha : n \to 2$ un sottoinsieme perfetto S_α di S, procedendo per ricorsione su n. Data $\alpha : n \to 2$ e $b \in 2$, indichiamo con $\alpha^\frown b$ la sequenza $\alpha \cup \{(n, b)\} : n+1 \to 2$.

$$S_\emptyset = S \qquad S_{\alpha^\frown b} = \begin{cases} X & \text{se } b = 0 \\ Y & \text{se } b = 1 \end{cases} \quad \text{con } f(S_\alpha) = (X, Y)$$

Data una successione infinita $s : \omega \to 2$ definiamo

$$S_s = \bigcap \{ S_\alpha \mid \alpha = s|_n \,,\, n \in \omega \}$$

Osserviamo che, per ogni successione s, $S_s \neq \emptyset$, infatti, per

ogni n e s, $S_{s|n+1} \subseteq S_{s|n}$, i compatti $S_{s|n}$ costituiscono, quindi, una catena di compatti non vuoti, per cui la loro intersezione, che è S_s, non è vuota.

Inoltre, se $s \neq t$, allora $S_s \cap S_t = \emptyset$. Infatti, detto n il minimo indice per cui $s_n \neq t_n$ — poniamo $s_n = 0$ e $t_n = 1$ — $S_{s|n+1} = A$ e $S_{t|n+1} = B$ con $(A, B) = f(S_{s|n}) = f(S_{t|n})$, quindi $S_s \subseteq A$ e $S_t \subseteq B$ sono disgiunti poiché $A \cap B = \emptyset$.

In conclusione, per ogni $s \in 2^\omega$ possiamo scegliere un punto in S_s, e questa funzione è iniettiva, quindi $2^{\aleph_0} \leq |S|$.
D'altro canto $|S| \leq |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$, quindi $|S| = 2^{\aleph_0}$. ☒

Esercizio Dimostrare la proposizione per $S \subseteq \mathbb{R}$ perfetto e non vuoto.

Esercizio Dimostrare la proposizione precedente senza l'assioma della scelta.

Teo (Cantor–Bendixson)
Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ chiuso. Allora $C = A \cup P$ con $|A| \leq \aleph_0$ e P perfetto.

Dim

Dato un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ definiamo il suo derivato

$$X' \overset{\text{def}}{=} \{\text{punti di accumulazione di } X\}$$
$$= \{a \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 \ ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap (X \setminus \{a\}) \neq \emptyset\}$$

Chiaramente, se X è chiuso

$$X' = X \setminus \{\text{punti isolati di } X\}$$

dove un punto $a \in X$ è isolato se $\exists \varepsilon > 0 \quad]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap X = \{a\}$.

Ci servirà l'osservazione seguente: $a \in X$ è un punto isolato di X se e solo se esistono esiste un intervallo $]s,t[$ avente estremi razionali che <u>isola a in X</u>, ossia

$$\exists s,t \in \mathbb{Q} \quad s < t \wedge]s,t[\cap X = \{a\}$$

Costruiamo ora una successione transfinita $\{C_\alpha\}_{\alpha \in Ord}$ di sottoinsiemi chiusi di C per ricorsione

$$C_0 = C \qquad C_{\alpha+1} = C_\alpha' \qquad C_\lambda = \bigcap \{C_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$$

Per vedere che tutti gli insiemi C_α sono chiusi basta osservare che il derivato di un chiuso è chiuso ed un'intersezione di chiusi è chiusa. Inoltre $\alpha \leq \beta \to C_\beta \subseteq C_\alpha$. Definiamo

$$P \overset{def.}{=} \bigcap_{\alpha \in Ord} C_\alpha = \{a \in \mathbb{R} \mid \forall \alpha \in Ord \quad a \in C_\alpha\}$$

$$A = C \setminus P$$

Dobbiamo dimostrare che P è perfetto e $|A| \leq \aleph_0$.

① P è perfetto.

P è chiuso in quanto intersezione di chiusi, occorre quindi dimostrare che ogni $a \in P$ è punto di accumulazione di P.

Per assurdo, sia $\varepsilon > 0$ tale che $P \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[= \{a\}$. Per ogni $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[- \{a\}$, siccome $x \notin P$, esiste α tale che $x \notin C_\alpha$ abbiamo quindi α_x minimo tale che $x \notin C_{\alpha_x}$.

Per rimpiazzamento esiste

$$\beta = \sup \{\alpha_x \mid x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\setminus \{a\}\}$$

D'altro canto a deve essere punto di accumulazione di ogni C_α altrimenti avremmo $a \notin C_{\alpha+1} \to a \notin P$. Quindi, in particolare, esiste a è punto di accumulazione di $C_{\beta+1}$, ed esiste $\beta = \sup \ldots$
$x \in C_{\beta+1} \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\setminus \{a\}$, di conseguenza $\alpha_x \geq \beta+1$ ↯

② A è al più numerabile.

Per ogni $x \in A$ possiamo considerare α minimo tale che $x \notin C_\alpha$. Questo α deve essere successore, perché, se fosse limite, avremmo $C_\alpha = \bigcap \{C_{\alpha'} \mid \alpha' < \alpha\}$ ed esisterebbe $\alpha' < \alpha$ tale che $x \notin C_{\alpha'}$.

Possiamo quindi definire β_x con $\alpha = \beta_x + 1$.

Siccome $x \in C_{\beta_x}$ ma $x \notin C_{\beta_x+1} = C'_{\beta_x}$, x deve essere un punto isolato di C_{β_x}. Scegliamo un intervallo $]s_x, t_x[$ avente estremi razionali che isola x in C_{β_x}.

Ci basta dimostrare che la funzione

$$A \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$
$$x \longmapsto (s_x, t_x)$$

è iniettiva. Siano x, y tali che $]s_x, t_x[=]s_y, t_y[$.

Supponiamo, senza perdita di generalità, $\beta_x \leq \beta_y$. Allora

$$y \in]s_y, t_y[\cap C_{\beta_y} \subseteq]s_x, t_x[\cap C_{\beta_x} = \{x\}$$

Di conseguenza $y = x$. ∎

Cor Se $C \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso allora o $|C| = 2^{\aleph_0}$ o $|C| \leq \aleph_0$.

"Vale l'ipotesi del continuo per i sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}$"

Dim Scriviamo $C = A \cup P$ usando il teorema. Se $P = \emptyset$

allora $|C| = |A| \leq \aleph_0$. Altrimenti $2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}| \leq |C| \leq 2^{\aleph_0}$ ∎

Esempio Esiste $S \subseteq \mathbb{R}$ non numerabile che non contiene alcun insieme perfetto non vuoto.

Dim Sia $|\mathbb{R}| = \aleph_\alpha$. E sia $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{R}$ una funzione di scelta. E' facile vedere che

$2^{\aleph_0} = |\text{intervalli}| \leq |\text{perfetti non vuoti}| \leq |\text{chiusi}| = |\text{aperti}| = 2^{\aleph_0}$

Quindi esiste una funzione suriettiva

$$w_\alpha \longrightarrow \text{perfetti non vuoti}$$
$$\beta \longmapsto P_\beta$$

Definiamo per ricorsione transfinita

$$g : w_\alpha \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$\beta \longmapsto (g_1(\beta), g_2(\beta))$$

con

$$g_1(\beta) = f\left(P_\beta \setminus (g_1[\beta] \cup g_2[\beta])\right)$$
$$g_2(\beta) = f\left(\mathbb{R} \setminus (g_1[\beta] \cup g_2[\beta] \cup \{g_1(\beta)\})\right)$$

La funzione g è ben definita perché, per ogni $\beta < w_\alpha$, $|\beta| < \aleph_\alpha$, quindi $|g_1[\beta]| < \aleph_\alpha$ e $|g_2[\beta]| < \aleph_\alpha$, d'altro canto $|P_\beta| = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| = \aleph_\alpha$. Di conseguenza, f è sempre applicata ad insiemi non vuoti.

Dimostriamo che $S = g_2[w_\alpha]$ soddisfa la tesi:

La funzione $g_2 : w_\alpha \to \mathbb{R}$ è iniettiva, perché, se $\gamma < \beta$, $g_2(\gamma) \in g_2[\beta]$ e $g_2(\beta) = f\left(\mathbb{R} \setminus (\ldots g_2[\beta] \ldots)\right) \neq g_2(\gamma)$.

Per cui $|g_2[w_\alpha]| = 2^{\aleph_0}$.

Fissiamo ora un perfetto non nuoto P_β. Dobbiamo dimostrare che $P_\eta \notin g_2[w_\alpha]$. Ci basta dire che $g_1(\eta) \notin g_2[w_\alpha]$. Supponiamo per assurdo $g_1(\eta) = g_2(\gamma)$ per qualche $\gamma < w_\alpha$.

Se $\gamma < \eta$, $g_1(\eta) = g_2(\gamma) \in g_1[\eta] \cup g_2[\eta]$ ↯

Se $\eta \leq \gamma$, $g_2(\gamma) = g_1(\eta) \in g_1[\gamma] \cup g_2[\gamma] \cup \{g_1(\gamma)\}$ ↯ ∎

Esercizi d'esame che si possono svolgere con la teoria vista fino a questo momento: tutti eccetto 3·VII·2019 – B.2–4 e 24·VII·2019 – C.4 (se non mi è sfuggito nulla).