Riepilogo delle forme equivalenti di AC

Abbiamo visto che diverse proposizioni sono equivalenti allo assioma della scelta. Per esempio, fissati gli altri assiomi, AC e l'affermazione che ogni insieme è bene ordinabile si implicano vicendevolmente. Elenchiamo le principali forme equivalenti dell'assioma della scelta.

Prop Assumendo gli assiomi di estensionalità, insieme vuoto, separazione, paio, unione, parti, infinito e rimpiazzamento, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- l'assioma della scelta
- ogni funzione surgettiva ha un'inversa destra
- il teorema del buon ordinamento
- il lemma di Zorn
- ogni cardinalità è un aleph
- $\forall X, Y \quad |X| \leq |Y| \vee |Y| \leq |X|$
- $\forall X \quad |X| \geq \aleph_0 \to |X \times X| = |X|$ ← Dobbiamo ancora dimostrare questo!

Teo Se per ogni X infinito $|X \times X| = |X|$, allora vale AC.

Dim Dato un insieme X cerchiamo un buon ordinamento di X.
Applicando l'ipotesi a $X \sqcup H(X)$ otteniamo

$$|X \times H(X)| \leq |(X \sqcup H(X)) \times (X \sqcup H(X))| = |X \sqcup H(X)|$$

Quindi esiste una funzione iniettiva $f : X \times H(X) \to X \sqcup H(X)$.

Per ogni $a \in X$ consideriamo la funzione

$$f_a : H(X) \to X \cup H(X)$$
$$b \mapsto f(a,b)$$

Se l'immagine $f_a[H(X)]$ di f_a fosse contenuta in X, allora avremmo una funzione iniettiva da $H(X)$ a X, che non può esistere. Quindi $f_a[H(X)] \cap H(X) \neq \emptyset$. Definiamo

$$g : X \to H(X)$$
$$a \mapsto \min\left(f_a[H(X)] \cap H(X)\right)$$

Questa funzione è ben definita perché $f_a[H(X)] \cap H(X) \subseteq H(X)$ è un insieme di ordinali, dunque ha un minimo. Inoltre g è iniettiva perché, se $a \neq b$, $g(a) = f(a, \text{qualcosa})$ e, per l'iniettività di f, $f(a,\text{qualcosa}) \neq f(b,\text{qualcosa}) = g(b)$. ∎

Aritmetica cardinale

Notazione k è un cardinale $\overset{\text{def.}}{\iff}$ k è un ordinale iniziale

$k = \lambda^+ \overset{\text{def.}}{\iff}$ k è il minimo cardinale $> \lambda$ $\left(\omega_\alpha^+ = \omega_{\alpha+1}\right)$

Possiamo definire le operazioni di prodotto, somma e potenza cardinale, per cui se $k = \omega_\alpha$ $\lambda = \omega_\beta$ $\mu = \omega_\gamma$ scriviamo $k = \lambda + \mu$, $k = \lambda \cdot \mu$, $k = \lambda^\mu$ per $\aleph_\alpha = \aleph_\beta + \aleph_\gamma$, $\aleph_\alpha = \aleph_\beta \cdot \aleph_\gamma$, $\aleph_\alpha = \aleph_\beta^{\aleph_\gamma}$.

Occorre fare attenzione a non confondere le operazioni cardinali con quelle ordinali. In questa sezione, ci occupiamo di operazioni cardinali. In questa sezione:

$$k = |X| \overset{\text{def.}}{\iff} k \text{ è un cardinale e } |k| = |X|$$

Def (Somma e prodotti infiniti)

Sia I un insieme e $\{k_i\}_{i\in I}$ una famiglia di cardinali — formalmente, la famiglia $\{k_i\}_{i\in I}$ è una funzione f tale che $\mathrm{Dom}(f) = I$ e $\forall i \in I$ $f(i)$ è un cardinale, k_i è un'abbreviazione per $f(i)$.

$$\sum_{i\in I} k_i \overset{\text{def.}}{=} \left| \bigcup \{ k_i \times \{i\} \mid i \in I \} \right|$$

$$\prod_{i\in I} k_i \overset{\text{def.}}{=} \left| \{ f : I \to \sup_i k_i \mid \forall i \in I \ f(i) \in k_i \} \right|$$

Nota Se $\forall i \in I$ $k_i = |X_i|$ e gli insiemi X_i sono a due a due disgiunti allora $\sum_{i\in I} k_i = \left| \bigcup \{ X_i \mid i \in I \} \right|$

Dim (richiede AC!) $|k_i \times \{i\}| = |k_i| \cdot 1 = |k_i| = |X_i|$

Per ogni i scegliamo una biezione $f_i : k_i \times \{i\} \to X_i$. Allora

$$f : \bigcup \{ k_i \times \{i\} \mid i \in I \} \longrightarrow \bigcup \{ X_i \mid i \in I \}$$

$$(a, i) \longmapsto f_i(a)$$

(ossia $f = \bigcup \{ f_i \mid i \in I \}$) è una biezione. ∎

Nota Se $\forall i \in I$ $k_i = |X_i|$

$$\sum_{i\in I} k_i \geq \left| \bigcup \{ X_i \mid i \in I \} \right|$$

$$\prod_{i\in I} k_i = \left| \{ f : I \to \bigcup \{ X_i \mid i \in I \} \mid \forall i \ f(i) \in X_i \} \right|$$

Dim Per la prima disuguaglianza si osserva che la funzione definita nella dimostrazione precedente è surgettiva — solo l'iniettività richiede, infatti, che gli insiemi X_i siano disgiunti.

La seconda è del tutto analoga. Date $g_i : K_i \to X_i$ biiezioni

$$g : \{ f : I \to \dots \mid \forall i \; f(i) \in K_i \} \longrightarrow \{ f : I \to \dots \mid \forall i \; f(i) \in X_i \}$$

$$g(f)(i) = g_i(f(i))$$

è una biiezione. ∎

Oss $$K^{\sum_{i \in I} \lambda_i} = \prod_{i \in I} K^{\lambda_i}$$

Dim Un elemento dell'insieme a sinistra è una funzione $f : \bigcup \{ \lambda_i \times \{i\} \mid i \in I \} \to K$ e possiamo identificarla con la funzione $\tilde{f} : I \to \bigcup \{ K^{\lambda_i} \mid i \in I \}$

$i \mapsto \tilde{f}_i$ definita da $\tilde{f}_i(\alpha) = f(\alpha, i)$ ∎

Esercizio Valgono le proprietà ragionevoli, per esempio

- Se $\forall i \in I \quad K_i \leq \lambda_i$

$$\sum_{i \in I} K_i \leq \sum_{i \in I} \lambda_i \qquad \prod_{i \in I} K_i \leq \prod_{i \in I} \lambda_i$$

- $\forall i \in I \quad K_i \leq \sum_{i \in I} K_i$
- Se $\forall i \in I \quad K_i \neq 0$

$$|I| \leq \sum_{i \in I} K_i \qquad \forall i \in I \quad K_i \leq \prod_{i \in I} K_i$$

- Se $I = I_1 \cup I_2$

$$\sum_{i \in I} K_i = \left(\sum_{i \in I_1} K_i \right) + \left(\sum_{i \in I_2} K_i \right) \qquad \prod_{i \in I} K_i = \left(\prod_{i \in I_1} K_i \right) \cdot \left(\prod_{i \in I_2} K_i \right)$$

- $\sum_{i \in K} \lambda = K \cdot \lambda \qquad \prod_{i \in K} \lambda = \lambda^K$
- $\left(\prod_{i \in I} K_i \right)^{\lambda} = \prod_{i \in I} K_i^{\lambda}$

Prop: Supponiamo che k_i per $i \in I$ siano cardinali $\neq 0$. Allora

$$\sum_{i \in I} k_i = |I| \cdot \sup_{i \in I} k_i$$

Dim (≤) $\sum_{i \in I} k_i \leq \sum_{i \in I} \left(\sup_{j \in I} k_j \right) = |I| \cdot \sup_{i \in I} k_i$

(≥) Siccome $|I| \cdot \sup_{i \in I} k_i$ è il massimo fra $|I|$ e $\sup_{i \in I} k_i$, basta verificare che $\sum_{i \in I} k_i \geq |I|$ e $\sum_{i \in I} k_i \geq \sup_{i \in I} k_i$.
La prima è conseguenza dell'esercizio precedente.
La seconda segue osservando che $\forall j \in I \quad \sum_{i \in I} k_i \geq k_j$. ∎

Teo (Königs) Se $\forall i \in I \quad k_i < \lambda_i$ allora $\sum_{i \in I} k_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$

Dim Dimostriamo che non può valere il $\geq$. Siano:

$$A = \{ f : I \to \sup_i \lambda_i \mid \forall i \in I \ f(i) \in \lambda_i \}$$

$$B = \bigcup \{ k_i \times \{i\} \mid i \in I \}$$

Data $f : A \to B$, dobbiamo dimostrare che f non è surgettiva.
Consideriamo $f_i : k_i \longrightarrow \lambda_i$

$$\alpha \longmapsto f(\alpha, i)(i) \in \lambda_i$$

Siccome $k_i \in \lambda_i$, f_i non può essere surgettiva, quindi, per ogni i, $\lambda_i \setminus \mathrm{Im}(f_i) \neq \emptyset$. Per l'assioma di scelta, c'è

$$g : I \longrightarrow \sup_{i \in I} \lambda_i$$

$$i \longmapsto g(i) \in \lambda_i \setminus \mathrm{Im}(f_i).$$

Chiaramente $g \in B$, verifichiamo che $g \notin \mathrm{Im}(f)$.
Se $g = f(\alpha, i)$ allora $g(i) = f(\alpha, i)(i) = f_i(\alpha) \in \mathrm{Im}(f_i)$ ↯ ∎

Esempio $k = \sum_{i<k} 1 < \prod_{i<k} 2 = 2^k$

Esempio $\aleph_w = \sum_{\alpha<w} w_\alpha < \prod_{\alpha<w} w_{\alpha+1} \leq \aleph_w^{\aleph_0}$

Esercizio Se $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$ allora $\aleph_{\omega_1}^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$

Sol.

$$\aleph_{\omega_1}^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$$

Esercizio Se $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$ allora $\aleph_{\omega_2}^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_2}$

Sol. La disuguaglianza $\aleph_{\omega_2} \leq \aleph_{\omega_2}^{\aleph_0}$ è immediata. Per la disuguaglianza opposta, osserviamo che $\aleph_{\omega_2}^{\aleph_0}$ è la cardinalità dell'insieme delle funzioni $f : w \to w_{\omega_2}$. Sia f una di queste funzioni, allora dimostriamo che $\sup\{f(n) \mid n \in w\} < w_{\omega_2}$

Se così non fosse avremmo

$$w_{\omega_2} = \sup\{f(n) \mid n \in w\} = \bigcup\{f(n) \mid n \in w\}$$

Quindi

$$\aleph_{\omega_2} \leq \sum_{n \in w} |f(n)| \leq \sum_{n \in w} \aleph_{\omega_1} = \aleph_{\omega_1} \quad \rightsquigarrow$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$\{f : w \to w_{\omega_2}\} = \bigcup_{\alpha \in w_{\omega_2}} \{f : w \to \alpha\}$$

Di conseguenza

$$\aleph_{\omega_2}^{\aleph_0} = |\{f : w \to w_{\omega_2}\}| \leq \sum_{\alpha \in w_{\omega_2}} |\alpha|^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_2} \cdot \aleph_{\omega_1} = \aleph_{\omega_2}$$