Def (cofinalità – v.1)

Dato un cardinale infinito k, la cofinalità di k $\mathrm{cof}(k)$ è il minimo cardinale μ per cui esiste una famiglia $\{\lambda_i\}_{i\in\mu}$ di cardinali tale che $\forall i\in\mu\ \ \lambda_i<k$ e $k=\sum_{i\in\mu}\lambda_i$.

In altri termini, $\mathrm{cof}(k)$ è il minimo numero di parti $<k$ in cui può essere partizionato un insieme di cardinalità k.

Esempi

$\mathrm{cof}(\aleph_0)=\aleph_0$ — un'unione finita di insiemi finiti è finita

$\mathrm{cof}(\aleph_\omega)=\aleph_0$ — $\sum_{\alpha<\omega}\aleph_\alpha=\aleph_\omega$, se $|I|<\aleph_0$, $\sum_{\alpha\in I}\aleph_\alpha=\aleph_{\max(I)}<\aleph_\omega$

$\mathrm{cof}(\aleph_{\omega_2})=\aleph_{\omega_2}$ — $\aleph_{\omega_2}=\sum_{i\in I}k_i\le\sum_{i\in I}\aleph_{\omega_1}=\max(|I|,\aleph_{\omega_1})\longrightarrow|I|=\aleph_{\omega_2}$

Def (cofinalità – v.2)

Dato un insieme ordinato $(S,<)$, diciamo che $A\subseteq S$ è cofinale in S se $\forall x\in S\ \exists y\in A\ x\le y$ — ossia A non ha maggioranti stretti in S. La cofinalità di $(S,<)$ è la minima cardinalità di un sottoinsieme cofinale di S.

Esempi

$\mathrm{cof}(\omega)=\aleph_0$ — ω è cofinale in sé stesso, un sottoins. finito ha massimo

$\mathrm{cof}(\mathbb{R},<)=\aleph_0$ — $\mathbb{N}$ è cofinale in $\mathbb{R}$

$\mathrm{cof}(\omega+1)=1$ — $\{\omega\}$ è cofinale in $\omega+1$

$\mathrm{cof}(\omega_\omega)=\aleph_0$ — $\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\dots\}$ è cofinale in $\omega_\omega=\sup_{i\in\omega}\omega_i$

$\mathrm{cof}(\omega_{\omega_2})=\aleph_{\omega_2}$ — Per la proposizione seguente

Prop. Se k è un cardinale infinito $\mathrm{cof}^{(V.1)}(k) = \mathrm{cof}^{(V.2)}(k)$.

Dim Siano $\lambda_1 = \mathrm{cof}^{(V.1)}(k)$ e $\lambda_2 = \mathrm{cof}^{(V.2)}(k)$.

$(\lambda_1 \leq \lambda_2)$ Sia A cofinale in k. Siccome k è limite $x \in k \to x+1 \in k$ quindi $\forall x \in k\ \exists y \in A\ x+1 \leq y$ da cui $\forall x \in k\ \exists y \in A\ x \in y$ ossia $k = \bigcup A$. Abbiamo quindi $k \leq \sum_{a \in A} |a| \leq \sum_{a \in A} k = k$. Siccome ogni $a \in A$ è $< k$, e k è regolare, $|a| < k$. L'identità $\sum_{a \in A} |a| = k$ dimostra quindi che $\lambda_1 \leq |A|$.

$(\lambda_2 \leq \lambda_1)$ Se $\lambda_1 = k$ non c'è niente da dimostrare, perché k stesso è cofinale in sé. Assumiamo quindi $\lambda_1 < k$. Per ipotesi esiste $\{k_i\}_{i \in I}$ con $|I| = \lambda_1$, tale che

$$k = \sum_{i \in I} k_i = \max\left(|I|, \sup_{i \in I} k_i\right) = \sup_{i \in I} k_i$$

(perché $|I| = \lambda_1 < k$)

Dimostriamo che $A \overset{\text{def.}}{=} \{k_i \mid i \in I\}$ è cofinale in k. Da questo segue, poi, l'asserto in quanto la funzione surgettiva $i \mapsto k_i$ da I ad A testimonia che $|A| \leq \lambda_1$.

Dato $x \in k$, se $\forall i \in I\ k_i < x$ allora $\sup_{i \in I} k_i \leq x < k$ ↯

Quindi $\exists i \in I\ x \leq k_i$, quindi $\exists y \in^{k_i} A\ x \leq y$. ∎

Oss. Sia $(S, <_S)$ totalmente ordinato e $T \subseteq S$ cofinale in S. Indichiamo con $<_T$ la restrizione di $<_S$ a T $\quad <_T \overset{\text{def.}}{=} <_S \cap (T \times T)$

Allora $\mathrm{cof}(S, <_S) = \mathrm{cof}(T, <_T)$.

Dim Dimostriamo che se $A \subseteq T$ è cofinale in $(T, <_T)$, allora A è anche cofinale in S. Mentre se $B \subseteq S$ è cofinale in $(S, <_S)$, allora esiste $B' \subseteq T$ con $|B'| \leq |B|$ cofinale in T.

- Dato $A \subseteq T$ cofinale in T e $x \in S$ dobbiamo trovare un $y \in A$ con $x \leq y$. Siccome T è cofinale in S esiste $t \in T$ con $x \leq t$, e, siccome A è cofinale in T, esiste $y \in A$ con $t \leq y$, per cui $x \leq y$.
- Dato $B \subseteq S$ cofinale, siccome T è cofinale in S, per ogni $b \in B$ possiamo scegliere un $y_b \in T$ con $b < y_b$. Sia $B' = \{y_b \mid b \in B\} \subseteq T$. Siccome la funzione $b \mapsto y_b$ è suriettiva da B a B' abbiamo $|B'| \leq |B|$. Inoltre preso un qualunque $x \in S$ esiste $b \in B$ con $x \leq b$, quindi $x \leq y_b \in B'$. ∎

Oss. Sia k un cardinale infinito, $\mathrm{cof}(k) \leq k$

Dim $k = \sum_{i \in k} 1$

Oss. Sia $(S, <)$ totalmente ordinato, allora

$$\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(S, <)) = \mathrm{cof}(S, <)$$

e, in particolare, per ogni cardinale k, $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(k)) = \mathrm{cof}(k)$

Dim Sia $k = \mathrm{cof}(S, <)$ e $A \subseteq S$ cofinale con $|A| = k$. Supponiamo, per assurdo, $\mathrm{cof}(k) < k$, quindi esistono $\{k_i\}_{i \in I}$ con $|I| = \mathrm{cof}(k)$ e $\forall i \in I$ $k_i < k$ tali che $\sum_{i \in I} k_i = k$. Fissiamo allora una famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ di sottoinsiemi di A disgiunti tali che $\forall i \in I$ $|A_i| = k_i$ e $\bigcup \{A_i \mid i \in I\} = A$. Per ogni $i \in I$, A_i non è cofinale in S, siccome $|A_i| = k_i < k = \mathrm{cof}(S)$, quindi possiamo scegliere un maggiorante stretto $y_i \in S$ di A_i. Detto $B = \{a_i \mid i \in S\}$, abbiamo $|B| \leq |I| < k$. D'altro canto,

$\mathcal{B}$ è cofinale in S, infatti, preso un $x \in S$, siccome A è cofinale, esiste $a \in A$ con $x \leq a$, questo a deve appartenere ad uno degli insiemi A_i, quindi $x \leq a \leq y_i \in \mathcal{B}$. Per cui abbiamo trovato un insieme $\mathcal{B}$ cofinale in S con $|\mathcal{B}| < \kappa = \mathrm{cof}(S)$ ↯

Vedremo ora alcune applicazioni della cofinalità

Corollario (del t. di König)

Per κ cardinale infinito, e λ cardinale ≥ 2.

$$\kappa < \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)} \qquad \kappa < \mathrm{cof}(\lambda^\kappa)$$

Dim Cominciamo dalla prima. Detta $\mu = \mathrm{cof}(\kappa)$, esiste una famiglia $\{\kappa_i\}_{i \in \mu}$ tale che $\forall i \ \kappa_i < \kappa$ e $\kappa = \sum_{i \in \mu} \kappa_i$.

Per König abbiamo

$$\kappa = \sum_{i \in \mu} \kappa_i < \prod_{i \in \mu} \kappa = \kappa^\mu = \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)}$$

Passando alla seconda, assumiamo, per assurdo, $\mathrm{cof}(\lambda^\kappa) \leq \kappa$, e applichiamo la prima a λ^κ, che è infinito perché $\geq 2^{\aleph_0}$.

$$\lambda^\kappa < (\lambda^\kappa)^{\mathrm{cof}(\lambda^\kappa)} = \lambda^{\kappa \cdot \mathrm{cof}(\lambda^\kappa)} \leq \lambda^{\kappa \cdot \kappa} = \lambda^\kappa$$

↯ □

Def La funzione $\beth$ "ghimel" è definita sui cardinali da

$$\beth(\kappa) = \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)}$$

Cor Dato un cardinale infinito κ

$$\kappa < \beth(\kappa) \qquad \mathrm{cof}(\kappa) < \mathrm{cof}(\beth(\kappa))$$

Dim La prima è immediata. La seconda segue da

$$\mathrm{cof}(\kappa) = \mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\kappa)) < \mathrm{cof}(\kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)})$$

□

Def. Un cardinale k è:

- regolare se $\mathrm{cof}(k) = k$
- singolare se $\mathrm{cof}(k) < k$
- successore se $k = \aleph_{\alpha+1}$ per qualche ordinale α
- limite se $k = \aleph_\lambda$ con λ ordinale limite
- limite forte se $\forall \alpha \ \aleph_\alpha < k \rightarrow 2^{\aleph_\alpha} < k$
- debolmente inaccessibile se è regolare e limite
- (fortemente) inaccessibile se è regolare e limite forte