Def. Un cardinale κ è:

- **regolare** se $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$
- **singolare** se $\mathrm{cof}(\kappa) < \kappa$
- **successore** se $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$ per qualche ordinale α
- **limite** se $\kappa = \aleph_\lambda$ con λ ordinale limite
- **limite forte** se $\forall \alpha \ \aleph_\alpha < \kappa \to 2^{\aleph_\alpha} < \kappa$
- **debolmente inaccessibile** se è regolare e limite
- (fortemente) **inaccessibile** se è regolare e limite forte

Oss. Un cardinale limite forte è anche limite

Dim. Se $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$ allora $\kappa \leq 2^{\aleph_\alpha}$, quindi κ non è limite forte. ∎

Prop. I cardinali successori sono regolari.

Dim. Sia $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$. Supponiamo per assurdo $\lambda = \mathrm{cof}(\kappa) < \kappa$.
Allora esiste $\{\kappa_i\}_{i\in\lambda}$ con $\forall i \in \lambda \ \kappa_i < \kappa$ e $\sum_{i\in\lambda} \kappa_i = \kappa$.
Quindi:

$$\kappa = \sum_{i\in\lambda} \kappa_i \leq \sum_{i\in\lambda} \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot \lambda \leq \aleph_\alpha < \kappa$$ ↯

∎

Cor. Se κ è successore $\quad 2^{\aleph(\kappa)} = 2^\kappa$

Dim. $2^{\aleph(\kappa)} = \kappa^\kappa = 2^\kappa \quad \left(2^\kappa \leq \kappa^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa\cdot\kappa} = 2^\kappa\right)$ ∎

Prop. Se λ è un ordinale limite. $\mathrm{cof}(\aleph_\lambda) = \mathrm{cof}(\lambda)$

Dim. Il sottoinsieme $\{w_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \subseteq w_\lambda$ è cofinale ed isomorfo, come ordine, a λ. ∎

Per esempio $\mathrm{cof}(\aleph_w) = \mathrm{cof}(w) = \aleph_0 < \aleph_w$ quindi $\aleph_w$ è un cardinale singolare.

Fatto In generale, un cardinale limite potrebbe essere regolare o singolare. Tuttavia, benché sia facile esibire cardinali limiti singolari, gli assiomi di ZFC non implicano l'esistenza di un cardinale limite e regolare — che si chiama, appunto, debolmente inaccessibile. Insomma, non si può dimostrare che tutti i cardinali limite sono singolari — e non c'è una buona ragione per assumere che lo siano — ma sarebbe coerente con gli assiomi della teoria degli insiemi che tutti i cardinali limite fossero singolari.

Prop (formula di Hausdorff)
Siano κ e λ cardinali infiniti, allora

$$(\kappa^+)^\lambda = \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$$

Dim Dimostriamo le due disuguaglianze.

($\geq$) Siccome $\kappa^\lambda \cdot \kappa^+ = \max(\kappa^\lambda, \kappa^+)$ basta notare che $(\kappa^+)^\lambda \geq \kappa^\lambda$ e $(\kappa^+)^\lambda \geq \kappa^+$, entrambe perché l'esponenziale di cardinali è debolmente monotono in entrambi gli argomenti

($\leq$) Distinguiamo due casi

- se $\kappa < \lambda$ $\quad \kappa^\lambda = \kappa^{\lambda^2} = (\kappa^\lambda)^\lambda \geq (2^\kappa)^\lambda \geq (\kappa^+)^\lambda$
  quindi, a maggior ragione, $(\kappa^+)^\lambda \leq \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$
- se $\kappa \geq \lambda$ Sia $S_\alpha = \{f : \lambda \to \alpha\}$ per cui $|S_\alpha| = |\alpha|^\lambda$ e, in particolare, $(\kappa^+)^\lambda = |S_{\kappa^+}|$.

Presa una $f \in S_{\kappa^+}$, osserviamo che $|Im(f)| = \lambda < \kappa^+$

Tuttavia κ^+ è regolare, quindi $Im(f)$ non è cofinale in κ^+, e, di conseguenza, esiste un ordinale $\alpha < \kappa^+$ tale che $\forall x \in \lambda \; f(x) < \alpha$, ossia $f \in S_\alpha$.

Abbiamo dunque dimostrato che $S_{\kappa^+} = \bigcup \{S_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\}$

Per cui $|S_{\kappa^+}| \leq \sum_{\alpha < \kappa^+} |S_\alpha| \leq \sum_{\alpha < \kappa^+} |\alpha|^\lambda \leq \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$ ∎

Esempi

- κ infinito $\rightarrow$ $\kappa < cof(2^\kappa) \leq 2^\kappa$
- $\aleph_\omega < \aleph_\omega^{cof(\aleph_\omega)} = \aleph_\omega^{cof(\omega)} = \aleph_\omega^{\aleph_0}$
- Se $2^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha_1}$, $\aleph_{\alpha_2}^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha_1}^{\aleph_0} \cdot \aleph_{\alpha_2} = \aleph_{\alpha_1} \cdot \aleph_{\alpha_2} = \aleph_{\alpha_2}$

Esercizio Dimostrare che $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \beth(\aleph_1) \cdot \beth(\aleph_\omega)$

(*Suggerimento alla pagina successiva)

Fatto La funzione esponenziale κ^λ è determinata ricorsivamente dalle funzioni cof e $\beth$.

Non dimostriamo questo fatto, dimostriamo tuttavia il seguente caso particolare, che basta ad illustrare le tecniche necessarie: la funzione del continuo $\kappa \mapsto 2^\kappa$ è determinata ricorsivamente dalla funzione $\beth$.

Def. Sia κ un cardinale limite. Definiamo

$$2^{<\kappa} = \sup \{2^\lambda \mid \lambda \text{ cardinale } < \kappa\}$$

Lemma Dato κ cardinale limite

$$2^\kappa = \left(2^{<\kappa}\right)^{cof(\kappa)}$$

Dim Sia $\lambda = \mathrm{cof}(\kappa)$ e $\{\kappa_i\}_{i<\lambda}$ tale che $\forall i<\lambda\ \kappa_i < \kappa$ e $\sum_{i<\lambda} \kappa_i = \kappa$. Allora

$$2^\kappa = 2^{\sum_{i<\lambda}\kappa_i} = \prod_{i<\lambda} 2^{\kappa_i} \leq \prod_{i<\lambda} 2^{<\kappa} = \left(2^{<\kappa}\right)^\lambda \leq \left(2^\kappa\right)^\lambda = 2^\kappa$$ ∎

Def Sia κ un cardinale, diciamo che la funzione $\lambda \mapsto 2^\lambda$ è definitivamente costante sotto κ se esiste un cardinale $\mu < \kappa$ tale che $\forall \nu$ cardinale $\mu \leq \nu < \kappa \to 2^\nu = 2^\mu$.

Prop La funzione $\kappa \mapsto 2^\kappa$ è determinata da ∂ come segue:

$$2^\kappa = \begin{cases} \partial(\kappa) & \text{se } \kappa \text{ è successore} \\ & \text{altrimenti:} \\ 2^{<\kappa}\cdot\partial(\kappa) & \text{se } \lambda\mapsto 2^\lambda \text{ è def. costante sotto } \kappa \\ \partial(2^{<\kappa}) & \text{se } \lambda\mapsto 2^\lambda \text{ NON è def. cost. sotto } \kappa \end{cases}$$

Dim Abbiamo già visto il caso successore. Supponiamo che κ sia un cardinale limite.

- Caso $\lambda\mapsto 2^\lambda$ definitivamente costante sotto κ e κ regolare
$$2^{<\kappa}\cdot\partial(\kappa) = 2^{<\kappa}\cdot\kappa^\kappa = 2^{<\kappa}\cdot 2^\kappa = 2^\kappa$$
- Caso $\lambda\mapsto 2^\lambda$ definitivamente costante sotto κ e κ singolare
Sia μ tale che $\forall \nu$ cardinale $\mu \leq \nu < \kappa \to 2^\nu = 2^\mu = 2^{<\kappa}$
$$2^\kappa = \left(2^{<\kappa}\right)^{\mathrm{cof}(\kappa)} = 2^{\mu\cdot\mathrm{cof}(\kappa)} = 2^\mu = 2^{<\kappa}$$

Quindi:

---

* Suggerimento per l'esercizio: studiare $\left(\prod_{n<\omega} \aleph_n\right)^{\aleph_1}$

$$2^{<\kappa} \leq 2^{<\kappa} \cdot \mathrm{cof}(\kappa) = 2^{<\kappa} \cdot \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)} \leq 2^{<\kappa} \cdot (2^{<\kappa})^{\mathrm{cof}(\kappa)} \leq 2^{\mu} \cdot 2^{\mu \cdot \mathrm{cof}(\mu)} = 2^{<\kappa}$$

- Caso $\lambda \mapsto 2^\lambda$ non definitivamente costante sotto κ.

Basta dimostrare che $\mathrm{cof}(2^{<\kappa}) = \mathrm{cof}(\kappa)$, da questo segue

$$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cof}(\kappa)} = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cof}(2^{<\kappa})} = \beth(2^{<\kappa})$$

Dimostriamo che $\mathrm{cof}(2^{<\kappa}) \leq \mathrm{cof}(\kappa)$. Sia $A \subseteq \kappa$ cofinale. Consideriamo $B = \{2^\alpha \mid \alpha \in A\}$. Chiaramente $|B| \leq |A|$. Mostriamo che B è cofinale in $2^{<\kappa}$. Se $x < 2^{<\kappa}$, allora esiste $\alpha < \kappa$ tale che $x < 2^\alpha$. Siccome A è cofinale in κ, esiste $\beta \in A$ tale che $\alpha \leq \beta$. Quindi $2^\beta \in B$ e $x < 2^\beta$.

Dimostriamo, ora, la disuguaglianza opposta: $\mathrm{cof}(\kappa) \leq \mathrm{cof}(2^{<\kappa})$. Per definizione, dato $\alpha < 2^{<\kappa}$, esiste $\beta < \kappa$ tale che $\alpha < 2^\beta$. Chiamiamo β_α il minimo di questi β. Sia, ora, $A \subseteq 2^{<\kappa}$ un insieme cofinale e definiamo $B = \{\beta_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Come al caso precedente $|B| \leq |A|$: dimostriamo che B è cofinale in κ. Preso $x \in \kappa$, $2^x \leq 2^{<\kappa}$. Però, siccome $\lambda \mapsto 2^\lambda$ non è definitivamente costante sotto κ, esiste y con $x < y < \kappa$ tale che $2^x < 2^y$, quindi $2^x < 2^{<\kappa}$. Sia $\alpha \in A$ con $2^x \leq \alpha$, che esiste perché A è cofinale. Allora $2^x \leq \alpha < 2^{\beta_\alpha}$. Quindi $\beta_\alpha \in B$ e $x < \beta_\alpha$.

∎

La gerarchia di Von Neumann & l'assioma di buona fondazione

Insiemi come questi sono (forse?) nostri indesiderabili

$\{\{\{\{\{\ldots\}\}\}\}\}$ $\quad x = \{x\}$ $\quad y = \{z\}$ $\quad z = \{y\}$



Desideriamo dimostrare, intanto, che, a patto che gli assiomi della teoria degli insiemi non si contraddicano — nel qual caso dimostrerebbero qualunque cosa — essi NON dimostrano la esistenza di insiemi del genere.

Strategia: noi costruiamo un universo insiemistico V_*, che è una classe propria, al cui interno gli assiomi sono veri, e che, tuttavia, non contiene quella robaccia.

Def Costruiamo per ricorsione transfinita

$$V_0 = \emptyset$$
$$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$$
$$V_\lambda = \bigcup \{V_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \quad \text{per } \lambda \text{ limite}$$

La classe V_* è l'unione degli insiemi V_α, formalmente:

$$x \in V_* \overset{\text{def.}}{\equiv} \exists \alpha \in Ord \; x \in V_\alpha$$

Lemma $\forall \alpha \in Ord \; V_\alpha$ è transitivo

Dim Per induzione transfinita.

- Caso V_0: immediato poiché $\emptyset$ è transitivo a vuoto.
- Caso successore:

$x \in V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha) \Rightarrow x \subseteq V_\alpha \Rightarrow \forall y \in x \; y \subseteq V_\alpha \Rightarrow \forall y \in x \; y \in V_{\alpha+1}$

↑ poiché V_α è transitivo per ipotesi induttiva

- Caso limite: $x \in V_\lambda \Rightarrow x \in V_\alpha$ per qualche $\alpha < \lambda$ $\Rightarrow x \subseteq V_\alpha \subseteq V_\lambda$ ∎

Con V_* è una classe transitiva, ossia $\forall x \in V_* \quad x \subseteq V_*$

Lemma $\forall \alpha, \beta$ ordinali $\alpha \leq \beta \to V_\alpha \subseteq V_\beta$

Dim Dimostriamo per induzione transfinita su β che

$$\forall \alpha < \beta \quad V_\alpha \subseteq V_\beta$$

- Caso $\beta = 0$: vero a vuoto
- Caso successore: dobbiamo dimostrare $\forall \alpha < \beta + 1 \quad V_\alpha \subseteq V_{\beta+1}$.
  Se $\alpha = \beta$, $V_\alpha = V_\beta$, quindi $V_\alpha \subseteq V_\beta$. Se $\alpha < \beta$, $V_\alpha \subseteq V_\beta$ per ipotesi induttiva. In ogni caso $V_\alpha \subseteq V_\beta \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta+1}$ e, per la transitività di $V_{\beta+1}$, $V_\beta \subseteq V_{\beta+1}$. Quindi $V_\alpha \in V_{\beta+1}$.
- Caso limite: $\alpha < \lambda \Rightarrow V_\alpha \subseteq \bigcup \{V_\alpha \mid \alpha < \lambda\} = V_\lambda$ ∎

Lemma $\forall \alpha \in Ord \quad \alpha \subseteq V_\alpha$.

Dim Per induzione transfinita.

- Caso base: $\emptyset \subseteq V_0 = \emptyset$
- Caso successore: $\alpha \subseteq V_\alpha \Rightarrow \alpha \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$
  $\Rightarrow \alpha \subseteq V_{\alpha+1}$
  $\Rightarrow \alpha + 1 \subseteq V_{\alpha+1}$
- Caso limite: $\lambda = \bigcup \{\alpha \mid \alpha < \lambda\} \subseteq \bigcup \{V_\alpha \mid \alpha < \lambda\} = V_\lambda$ ∎

Def. Data una formula insiemistica, la possiamo relativizzare a V_* rimpiazzando tutti i quantificatori $\exists \square$ con $\exists \square \in V_*$ e tutti i $\forall \square$ con $\forall \square \in V^*$

Teo Valgono gli assiomi della teoria degli insiemi relativizzati a V_κ.

(1) Vuoto: $\exists x \in V_\kappa \ \forall y \in V_\kappa \ y \notin x$

Basta prendere $x = \emptyset \in V_1$

(2) Estensionalità $\forall a, b \in V_\kappa \ a = b \leftrightarrow \forall x \in V_\kappa \ (x \in a \leftrightarrow x \in b)$

Per la transitività dei V_α, dati $a, b \in V_\kappa$, gli elementi di a e b sono anch'essi in V_κ, quindi dire $\forall x \in V_\kappa \ (x \in a \leftrightarrow x \in b)$ equivale a dire $\forall x \ (x \in a \leftrightarrow x \in b)$. Si conclude quindi per l'assioma di estensionalità.

(3) Separazione $\forall A \in V_\kappa \ \exists B \in V_\kappa \ \forall x \in V_\kappa \ x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge p(x))$

Per separazione esiste $B = \{x \in A \mid x \in V_\kappa \wedge \varphi(x)\}$. Siccome $B \subseteq A \in V_\alpha$ per qualche α, $B \subseteq V_\alpha$ per transitività, quindi $B \in V_{\alpha+1}$, quindi $B \in V_\kappa$.

(4) Paio: $\forall a, b \in V_\kappa \ \exists B \in V_\kappa \ \forall x \in V_\kappa \ x \in B \leftrightarrow (x = a \vee x = b)$

Se $a \in V_\alpha$ e $b \in V_\beta$ e, senza perdita di generalità, $\alpha \leq \beta$, allora $a, b \in V_\beta$, quindi $\{a, b\} \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta+1}$.

(5) Unione: $\forall A \in V_\kappa \ \exists B \in V_\kappa \ \forall x \in V_\kappa \ x \in B \leftrightarrow \exists y \in A \ x \in y$

Se $A \in V_\alpha$, per la transitività di V_α, $A \subseteq V_\alpha$, e, di nuovo per transitività, $\bigcup A \subseteq V_\alpha$. Quindi $\bigcup A \in V_{\alpha+1}$.

(6) Parti: $\forall A \in V_\kappa \ \exists B \in V_\kappa \ \forall x \in V_\kappa \ x \in B \leftrightarrow x \subseteq A$

Se $A \in V_\alpha$, $A \subseteq V_\alpha$ per la transitività di V_α, quindi $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$, quindi $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(V_{\alpha+1}) = V_{\alpha+2}$.

(7) Infinito: $\exists X \in V_\kappa \ \emptyset \in X \wedge \forall y \in V_\kappa \ y \in X \to y \cup \{y\} \in X$

Basta prendere $X = \omega \in V_{\omega+1}$.

(8) Rimpiazzamento: $F: V_* \to V_*$ funzione classe e $X \in V_* \to F[X] \in V_*$

Se $X \in V_\alpha$, $a \in X \to a \in V_\alpha$ per transitività. Quindi per $a \in X$ $F(a)$ è ben definito e $\in V_*$. Sia α_a minimo con $F(a) \in V_{\alpha_a}$

Sia $\beta = \sup \{\alpha_a \mid a \in X\}$. Allora $F[A] \subseteq V_\beta$, per cui $F[A] \in V_{\beta+1}$.

(5) Scelta. $\forall X \in V_* \ (\forall y \in X \ y \neq \emptyset) \to \exists f \in V_*$ f. di scelta su X.

Sia f una funzione di scelta su $X \in V_\alpha$, dimostriamo che $f \in V_*$. Osserviamo che $f \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(V_\alpha)) = V_{\alpha+2}$.

Quindi $f \in V_{\alpha+3}$. ∎

Oss. Dato $x \in V_*$ esiste il minimo α tale che $x \in V_\alpha$, e questo è necessariamente un ordinale successore, perché se $x \in V_\lambda = \bigcup \{V_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ allora $x \in V_\alpha$ per qualche $\alpha < \lambda$. Possiamo quindi dare la definizione seguente

Def Dato $x \in V_*$, detto α il minimo ordinale per cui $x \in V_\alpha$, il <u>rango</u> di x, $\operatorname{rank}(x)$, è definito da $\alpha = \operatorname{rank}(x) + 1$.

Oss:
$$x \in V_\alpha \iff \operatorname{rank}(x) < \alpha$$

Lemma Se $x \in y \in V_*$ allora $\operatorname{rank}(x) < \operatorname{rank}(y)$.

Dim $y \in V_{\operatorname{rank}(y)+1} = \mathcal{P}(V_{\operatorname{rank}(y)})$, quindi $y \subseteq V_{\operatorname{rank}(y)}$, di conseguenza $x \in V_{\operatorname{rank}(y)}$, per cui $\operatorname{rank}(x) < \operatorname{rank}(y)$. ∎

Def Diciamo che una classe C è <u>ben fondata</u> se per ogni insieme S di elementi di C, S contiene un x <u>minimale per appartenenza</u> ($\in$-minimale), ossia tale che $x \cap S = \emptyset$.

Prop La classe C è ben fondata se e solo se non esiste una famiglia $\{x_i\}_{i\in\omega}$ di elementi di C tale che $\forall i\in\omega$ $x_{i+1}\in x_i$. Ossia non esiste una catena infinita discendente per appartenenza $x_0\ni x_1\ni x_2\ni\dots$

Dim Se $\{x_i\}_{i\in\omega}$ è una catena infinita discendente, allora $\{x_i \mid i\in\omega\}$ non ha un elemento $\in$-minimale. D'altro canto, se S non ha un elemento $\in$-minimale, fissata una funzione di scelta f su S, possiamo definire una catena discendente per ricorsione numerabile. Prendiamo un qualunque $\overline{x}\in S$

$$x_0=\overline{x} \qquad x_{n+1}=f(\{y\in S \mid y\in x_n\})$$

dove l'insieme a cui è applicata f non è vuoto, altrimenti x_n sarebbe $\in$-minimale ∎

Una classe transitiva ben fondata non può, quindi, contenere mostri.

Prop La classe V_* è ben fondata

Dim Dato un insieme S di elementi di V_*, consideriamo $x\in S$ di rango minimo. Se esistesse $y\in S$ con $y\in x$ allora avremmo $\mathrm{rank}(y)<\mathrm{rank}(x)$ ↯ ∎

Teo Se gli assiomi della teoria degli insiemi sono coerenti, essi non dimostrano l'esistenza di una catena infinita discendente per appartenenza.

Dim Supponiamo di poter dimostrare che questa catena esiste. Allora, siccome gli assiomi valgono relativizzati

a V_α, potremmo svolgere l'intera dimostrazione relativizzata, ed otterremmo che esiste una catena infinita discendente in V_α. D'altro canto abbiamo dimostrato che questa non può esistere. Avremmo quindi la dimostrazione di un assurdo. ∎

A questo punto siamo giustificati, se lo desideriamo, ad assumere che i mostri non esistano. Potremmo, per esempio, fare la cosa codarda ed assumere che la classe di tutti gli insiemi V coincida con V_α

$$V = V_\alpha$$

I codardi, però, non fanno mai le cose troppo apertamente, quindi assumiamo quest'altro enunciato equivalente

(10) Assioma (buona fondazione) $\forall S \neq \emptyset \; \exists x \in S \; x \cap S = \emptyset$

La classe di tutti gli insiemi è ben fondata.

Promemoria (chiusura transitiva — lezione 20)

Dato un insieme x esiste il più piccolo insieme transitivo $tc(x)$ tale che $x \subseteq tc(x)$.

Teo (principio di $\in$-induzione) Se una classe C soddisfa

$$\forall S \; (\forall x \in S \; x \in C) \to S \in C$$

Allora $C = V$, ossia $\forall S \; S \in C$.

Dim Prendiamo, per assurdo, $S \notin C$. Sia

$$S' = \{ x \in tc(\{S\}) \mid x \notin C \}$$

Siccome $S \in S'$, S' non è vuoto, quindi, per buona fondazione

esiste $x \in S'$ tale che $\forall y \in x \; y \notin S'$. Siccome $x \in tc(\{S\})$, e quest'ultimo è transitivo, $\forall y \in x \; y \in tc(\{S\})$. E' quindi necessario che $\forall y \in x \; y \in C$. Ma allora $x \in C$ e $x \notin S'$ ⊠

Prop $V = V_*$ —— Ossia $\forall x \; \exists \alpha \in Ord \; x \in V_\alpha$.

Dim Per $\in$-induzione, ci basta dire che, fissato un S, se $\forall x \in S \; x \in V_*$, allora $S \in V_*$. Consideriamo

$$\alpha = \sup \{ rank(x) + 1 \mid x \in S \}$$

Per ogni $x \in S$ abbiamo $x \in V_{rank(x)+1} \subseteq V_\alpha$, quindi $S \subseteq V_\alpha$.

Di conseguenza $S \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$. ⊠

Cor Non esistono catene infinite discendenti per appartenenza.

I nostri sono stati sconfitti.

Fine della storia.

Esercizi

- Definiamo $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$, $\beth_\lambda = \sup\{\beth_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ con λ limite. Dimostrare che $\forall \alpha \in Ord \; |V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$
- Dimostrare che $rank(x) = \sup\{rank(y)+1 \mid y \in x\}$
- Dimostrare che V_ω soddisfa tutti gli assiomi <u>eccetto</u> l'assioma dell'infinito
- Dimostrare che $V_{\omega+\omega}$ soddisfa tutti gli assiomi <u>eccetto</u> l'assioma del rimpiazzamento
- Dimostrare che l'esistenza dell'ordinale $\omega+\omega$ non segue dagli assiomi della teoria degli insiemi <u>escluso</u> il rimpiazzamento, a patto che questi non si contraddicano.
- Dimostrare che, se κ è inaccessibile, allora tutti gli assiomi della teoria degli insiemi valgono in V_κ.
- Dimostrare che, se la teoria degli insiemi è coerente, allora non dimostra l'esistenza di un cardinale inaccessibile.