Esercizi: determina le seguenti cardinalità.

- $|$numeri irrazionali$|$
- $|$reali trascendenti$|$
- $|$sottoinsiemi infiniti di $\omega|$
- $|$sottoinsiemi finiti di $\mathbb{R}|$
- $|$sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}|$
- $|$successioni di naturali$|$
- $|$successioni crescenti di naturali$|$
- $|$successioni di reali$|$
- $|$successioni crescenti di reali$|$
- $|$succ. definitivamente costanti di naturali$|$
- $|$successioni periodiche di naturali$|$
- $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$
- $|$funzioni continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}|$
- $|$funzioni crescenti $\mathbb{R} \to \mathbb{R}|$

Definizione A è una partizione di B se $\bigcup A = B$, $\emptyset \notin A$ e $\forall x, y \in A \quad x \cap y = \emptyset$.

- $|$partizioni di $\omega|$
- $|$partizioni finite di $\omega|$
- $|$partizioni di ω in parti finite$|$
- $|$partizioni di ω in parti infinite$|$
- $|$sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}|$

Delle seguenti a quali è possibile rispondere, assumendo che, senza la scelta, non si può dire se valga o no $|$sottoinsiemi numerabili di $\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$?

- $|$sottoins. di $\mathbb{R} \sim (\omega, \in)$ con l'ordinamento indotto$|$
- $|$sottoins. di $\mathbb{R} \sim \mathbb{Q}$ con l'ordinamento indotto$|$
- $|$sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ ben ordinati dall'ordinamento indotto$|$

Soluzioni degli esercizi proposti il 26·III·2021

Questi esercizi vanno svolti SENZA FAR USO DELL'ASSIOMA DELLA SCELTA, che non è stato ancora trattato a lezione.

Le parti scritte in BLU servono come esempio per le soluzioni che potrebbero essere richieste ad un esame scritto. Le parti scritte in VERDE sono annotazioni aggiuntive, spiegazioni, etc.

- $|\text{numeri irrazionali}| = 2^{\aleph_0}$

  $|\text{numeri irrazionali}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$, $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ e $|\mathbb{Q}| \leq \aleph_0$

  NOTA: In sostanza $2^{\aleph_0} - \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$, ma scrivere questa sottrazione sarebbe SBAGLIATO, perché, in generale, la differenza di cardinalità non è definita. Sarebbe anche SBAGLIATO PENSARE che stiamo usando il fatto che $2^{\aleph_0} + \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$, infatti, da questa uguaglianza, non si deduce che se $|X| + \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$ allora $|X| = 2^{\aleph_0}$.

  In realtà stiamo usando questo lemma visto a lezione:

  Lemma $|A| = 2^{\aleph_0} \wedge B \subseteq A \wedge |B| \leq \aleph_0 \rightarrow |A \setminus B| = 2^{\aleph_0}$

  e la soluzione cita esattamente le ipotesi del lemma.

- $|\text{reali trascendenti}| = 2^{\aleph_0}$

  Come prima usando il fatto che $|\overline{\mathbb{Q}}^{alg.}| = \aleph_0$ (esercizio visto a lezione).

- $|\text{sottoinsiemi infiniti di } \omega| = 2^{\aleph_0}$

  $|\text{sott. inf. di } \omega| = |\mathcal{P}(\omega) \setminus (\text{sott. finiti di } \omega)|$

  $|\mathcal{P}(\omega)| = 2^{\aleph_0}$, mentre l'insieme dei sottoinsiemi finiti di un numerabile (ω) è numerabile.

- $|\text{sottoinsiemi finiti di } \mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$

  IDEA: Va da sé che i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{R}$ sono almeno tanti quanti i reali stessi. D'altro canto, se avessimo l'assioma della scelta, potremmo dimostrare che, fatto per altro intuitivo, l'immagine di una funzione ha cardinalità al più pari al dominio: $|f[X]| \leq |X|$. Siccome ogni insieme finito di reali è l'immagine di una successione di reali, considerando la funzione f che manda una successione nella sua immagine avremmo $|\text{ins. fin. di reali}| \leq |\text{succ. di reali}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Per aggirare il lemma vietato $|f[X]| \leq |X|$, possiamo lavorare al contrario, cercando una funzione iniettiva che manda i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{R}$ nelle successioni.

  SOLUZIONE: Sia $\mathcal{P}_f(\mathbb{R})$ l'insieme in questione. Sia $\clubsuit \notin \mathbb{R}$. Ci basta trovare $f : \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R} \cup \{\clubsuit\})^{\omega}$ iniettiva. Infatti questo mostra che $|\mathcal{P}_f(\mathbb{R})| \leq (2^{\aleph_0}+1)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, d'altro canto $x \mapsto \{x\}$ è iniettiva $\mathbb{R} \to \mathcal{P}_f(\mathbb{R})$, quindi vale la disuguaglianza opposta, da cui l'asserto.

Definiamo f come segue

$$f(X): \omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\clubsuit\}$$

$$n \longmapsto \begin{cases} \text{l'}n\text{-esimo elemento di } X & \text{se } n < |X| \\ \clubsuit & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove l'n-esimo elemento di X si intende secondo l'ordine totale su $X \subseteq \mathbb{R}$ indotto dall'ordinamento di $\mathbb{R}$. f è iniettiva poiché $X = \mathrm{Im}(f(X)) \cap \mathbb{R}$.

SOLUZIONE BUFFA (IDEA)

La funzione $g: \mathcal{P}_f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\omega$ seguente è iniettiva

$$g(X): n \longmapsto \sum_{x \in X} e^{n \cdot x}$$

- $|\text{sottoinsiemi infiniti di } \mathbb{R}| = 2^{2^{\aleph_0}}$

  Sia $\mathcal{P}_i(\mathbb{R})$ l'insieme in questione. $2^{2^{\aleph_0}} = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| \geq |\mathcal{P}_i(\mathbb{R})|$ Quindi ci basta trovare $f: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_i(\mathbb{R})$ iniettiva per avere la disuguaglianza opposta. Fissiamo una biezione $g: \mathbb{R} \to (0,1)$. Definiamo f come segue

  $$f: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_i(\mathbb{R})$$

  $$X \longmapsto g[X] \cup (1,2).$$

- $|\text{successioni di naturali}| = 2^{\aleph_0}$

  La cardinalità richiesta è $\aleph_0^{\aleph_0}$ e $2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

- $|\text{successioni crescenti di naturali}| = 2^{\aleph_0}$

  Grazie all'esercizio precedente, ci basta esibire una funzione iniettiva fra ω^ω e le successioni crescenti

$$f : \omega^\omega \longrightarrow \text{succ. crescenti}$$
$$(a_i)_{i\in\omega} \longmapsto \left(i + \sum_{n=0}^{i} a_n\right)_{i\in\omega}$$

(la successione $a_0, a_1, a_2, \dots$ va in $a_0, 1+a_0, a_1, 2+a_0+a_1, a_2, \dots$)

Verifiche:

- $f(a)$ è crescente poiché $\underbrace{(f(a))_{i+1} - (f(a))_i}_{\text{!}} = a_{i+1} + 1 > 0$
- f è iniettiva poiché $a_0 = (f(a))_0$ e $a_{i+1} = \underbrace{\quad}_{\text{!}} - 1$

  quindi $f(a)$ determina univocamente a.

SOLUZIONE BUFFA (IDEA)

Basta trovare $g : \{k \in \mathbb{R} \mid k > 0\} \to$ succ. crescenti iniettiva. Poniamo $(g(k))_i = \lfloor k \cdot i \rfloor$. Siccome $k = \lim_{i\to+\infty} \frac{(g(k))_i}{i}$, la successione $g(k)$ determina k.

- $|\text{successioni di reali}| = 2^{\aleph_0}$

  $|\mathbb{R}^\omega| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$
- $|\text{successioni crescenti di reali}|$

  Per l'esercizio precedente ci basta stabilire che la cardinalità richiesta è $\geq 2^{\aleph_0}$, ci basta quindi esibire una $f : \mathbb{R} \to$ succ. crescenti iniettiva

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \text{succ. crescenti}$$
$$x \longmapsto (i \cdot e^x)_{i\in\omega}$$

- $|\text{succ. definitivamente costanti di naturali}| = \aleph_0$

IDEA: La disuguaglianza $|\dots| \geq \aleph_0$ è immediata.

La disuguaglianza opposta deve basarsi sul fatto che $|\text{sequenze finite di naturali}| = \aleph_0$, perché, tutto sommato, una successione definitivamente costante è una sequenza finita il cui ultimo elemento si ripete incessantemente. Attenzione però che la stessa successione, es. $1, 2, 3, 3, 3, \dots$ può essere rappresentata in più di un modo es. $(1, 2, 3, 3)$, $(1, 2, 3, 3, 3)$.

SOLUZIONE: Sia X l'insieme dato. Ci sono $\aleph_0$ successioni costanti, quindi $\aleph_0 \leq |X|$. Per la disuguaglianza opposta esibiamo $f: X \to \bigcup \{w^i \mid i \in w \setminus \{0\}\} \subseteq$ parti finite di $w \times w$ iniettiva. A questo scopo, per $a \in X$, sia $l(a)$ il minimo i tale che $\forall j > i \; a_j = a_i$, che esiste perché a è definitivamente costante. Sia $f(a) = a|_{1+l(a)}$ ossia:

$$\begin{aligned} f(a) : 1 + l(a) &\longrightarrow w \\ i &\longmapsto a_i \end{aligned}$$

Per verificare l'iniettività osserviamo che $l(a) = \max(\mathrm{dom}(f(a)))$, quindi $f(a)$ determina $l(a)$, inoltre se $i \leq l(a)$, $a_i = (f(a))_i$, altrimenti $a_i = a_{l(a)} = (f(a))_{l(a)}$. Per cui a è determinata da $f(a)$.

- $|\text{successioni periodiche di naturali}| = \aleph_0$

Sia X l'insieme dato. Le successioni costanti sono $\aleph_0$ successioni periodiche. Rimane da dimostrare che

$|X| \leq \aleph_0$. Esibiamo una funzione iniettiva da X alle parti finite di $\omega \times \omega$. Detto $T(a)$ il periodo minimo di a, sia $f(a) = a|_{T(a)}$.

Per verificare l'iniettività osserviamo che $f(a)$ determina $T(a) = 1 + \max(\mathrm{dom}(f(a)))$ — tecnicamente $= \mathrm{dom}(f(a))$.

Ora $a_i = (f(a))_j$ dove $j < T(a)$ è l'unico $\equiv i \bmod T(a)$.

Quindi a è determinata da $f(a)$.

- $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = 2^{2^{\aleph_0}}$

La cardinalità richiesta è $\left(2^{\aleph_0}\right)^{2^{\aleph_0}}$ e

$$2^{2^{\aleph_0}} \leq \left(2^{\aleph_0}\right)^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}} \leq 2^{2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0 + \aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$$

- $|\text{funzioni continue } \mathbb{R} \to \mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$

<u>Idea:</u> Una funzione continua è determinata dai valori che assume sui razionali, quindi è come se avessimo un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$.

soluzione: Sia C_0 l'insieme in questione. Siccome le funzioni costanti sono continue, $|C_0| \geq |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Per la disuguaglianza opposta, dimostriamo che $|C_0| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Ci basta osservare che la funzione seguente è iniettiva

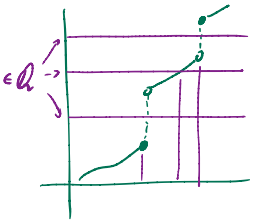
$$\begin{aligned} F : C_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \\ f &\longmapsto f|_{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

Supponiamo infatti $f \neq g$. Senza perdita di generalità possiamo assumere che esista x_0 tale che $f(x_0) > g(x_0)$

allora, per la permanenza del segno, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $f(x) > g(x)$ per ogni $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ esiste però un razionale q in questo intervallo. Per cui $f(q) > g(q)$, e $f|_{\mathbb{Q}} \neq g|_{\mathbb{Q}}$.

- $|\text{funzioni crescenti } \mathbb{R} \to \mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$

IDEA: Una funzione crescente supera ogni razionale in un punto ben determinato, e questi punti _quasi_ determinano la funzione. Quasi perché c'è più di un modo di superare un razionale nei punti di discontinuità. Converrà quindi codificare una funzione crescente con la funzione che manda ogni razionale nel punto di superamento corredato dell'informazione necessaria per disambiguare le discontinuità.



IDEA PIÙ DETTAGLIATA. Sia f crescente $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Per definizione, il reale $f(x)$ è l'insieme dei razionali $r < f(x)$. Quindi f è determinata dall'insieme delle coppie $(r, x) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ tali che $r < f(x)$. Se ora fissiamo r, siccome f è crescente, l'insieme dei x tali che $r < f(x)$ è un segmento iniziale di $\mathbb{R}$. Quindi f è determinata dalla funzione $\mathbb{Q} \to \{\text{seg. in. di } \mathbb{R}\}$ che manda r in $\{x \in \mathbb{R} \mid r < f(x)\}$. Siccome i segmenti iniziali di $\mathbb{R}$ sono $\mathbb{R}, \emptyset,]-\infty, x[$ e $]-\infty, x]$, ce ne sono $1 + 1 + 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Abbiamo quindi al più $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ funzioni crescenti.

SOLUZIONE. Osserviamo intanto che la cardinalità cercata è $\geq 2^{\aleph_0}$ perché per ogni $k \in \mathbb{R}$ la funzione $f_k(x) = x \cdot e^k$ è crescente. Dobbiamo dimostrare la disuguaglianza opposta.

Abbiamo bisogno di osservare che i segmenti iniziali di $\mathbb{R}$ sono $\mathbb{R}$, $\emptyset$ e gli insiemi della forma $]-\infty, x[$ o $]-\infty, x]$ per $x \in \mathbb{R}$. Consideriamo infatti un segmento iniziale $I \neq \emptyset$. O I è superiormente limitato o no. Se no allora $I = \mathbb{R}$. Se sì, I è o $]-\infty, \sup I[$ o $]-\infty, \sup I]$.

Quindi $|\{\text{segmenti iniziali di } \mathbb{R}\}| = 1 + 1 + 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Ci basta pertanto trovare una funzione iniettiva

$$F : (\text{funzioni crescenti } \mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to (\text{segmenti iniziali di } \mathbb{R})^{\mathbb{Q}}$$

Infatti $|(\text{segmenti iniziali di } \mathbb{R})^{\mathbb{Q}}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Sia

$$\begin{aligned} F(f) : \mathbb{Q} &\longrightarrow \text{segmenti iniziali di } \mathbb{R} \\ r &\longmapsto \{x \in \mathbb{R} \mid r < f(-x)\} \end{aligned}$$

Verifichiamo che F è ben definita e iniettiva.

- ✧ Buona definizione: $F(f)(r)$ è un segmento iniziale.
  Supponiamo $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ e $y \in F(f)(r)$. Allora $r < f(-y) < f(-x)$ poiché $-y < -x$. Quindi $x \in F(f)(r)$.
- ✧ Iniettività. Supponiamo $x \in \mathbb{R}$ e $f(x) < g(x)$. Allora esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $f(x) < r < g(x)$ per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Quindi $-x \in F(g)(r)$ ma $-x \notin F(f)(r)$, e, in particolare, $F(g) \neq F(f)$.

Definizione A è una **partizione** di B se $\bigcup A = B$, $\emptyset \notin A$ e $\forall x, y \in A \quad x \cap y = \emptyset$.

- $|\text{partizioni finite di } \omega| = |\text{partizioni di } \omega| = 2^{\aleph_0}$

Ci basta vedere che $2^{\aleph_0} \leq |\text{partizioni finite di } \omega|$ e $|\text{partizioni di } \omega| \leq 2^{\aleph_0}$.

Per la prima, osserviamo che la seguente funzione è iniettiva

$$f : \mathcal{P}(\omega \setminus \{0,1\}) \longrightarrow \text{partizioni finite di } \omega$$
$$A \longmapsto \{A \cup \{0\}, (\omega \setminus A) \cup \{1\}\}$$

infatti, se data una partizione x diciamo $z(x)$ lo unico elemento di x che contiene 0, abbiamo $A = (\omega \setminus \{0,1\}) \cap z(f(A))$. Quindi

$$|\{\text{partizioni finite di } \omega\}| \geq |\mathcal{P}(\underbrace{\omega \setminus \{0,1\}}_{\text{numerabile meno finito è numerabile}})| = 2^{\aleph_0}$$

Nota Verrebbe la tentazione di definire $f(A) = \{A, \omega \setminus A\}$, però questa funzione non è iniettiva (p.es. l'insieme dei numeri pari e l'insieme dei numeri dispari vanno nella medesima partizione).

Per la seconda, osserviamo che $g : \{\text{partizioni di } \omega\} \longrightarrow \omega^\omega$ definita da $g(X) : \omega \longrightarrow \omega$

$$n \longmapsto \text{il minimo dell'elemento } A \in X \text{ che contiene } n$$

è iniettiva.

Infatti $A \in X \leftrightarrow A \neq \emptyset \wedge \exists k \in \omega\ A = \{n \in \omega \mid g(X)(n) = k\}$
(se $A \in X$ basta prendere $k = \min(A)$, e $g(X) : \omega \to \omega$ assume solo valori del tipo $\min(A)$ per qualche $A \in X$)
Quindi $|\text{partizioni di } \omega| \leq |\omega^\omega| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

- $|\text{partizioni di } \omega \text{ in parti finite}| = 2^{\aleph_0}$

La disuguaglianza $|\dots| \leq 2^{\aleph_0}$ è conseguenza dell'esercizio precedente (seconda parte). Per l'opposta osserviamo che la funzione seguente è iniettiva

$$f : 2^\omega \longrightarrow \text{partizioni di } \omega \text{ in parti finite}$$
$$(a_i)_{i \in \omega} \longmapsto \{\{3i+2a_i\}, \{3i+1, 3i+2-2a_i\} \mid i \in \omega\}$$

per esempio

$$0,1,1,0,\dots \longmapsto \{\underbrace{\{0\},\{1,2\}}_{a_0=0}, \underbrace{\{3,4\},\{5\}}_{a_1=1}, \underbrace{\{6,7\},\{8\}}_{a_2=1}, \underbrace{\{9\},\{10,11\}}_{a_3=0}, \dots\}$$

Infatti $a_i = 0 \leftrightarrow \{3i\} \in f(a)$

$a_i = 1 \leftrightarrow \{3i+2\} \in f(a)$

- $|\text{partizioni di } \omega \text{ in parti infinite}| = 2^{\aleph_0}$

IDEA È facile risolvere questo esercizio con una costruzione ad hoc, ma si può anche ragionare così: C'è una corrispondenza biunivoca fra ω e $\omega \times \omega$, quindi anche fra le rispettive partizioni in parti infinite. D'altro canto, tutte le partizioni di ω si mappano iniettivamente nelle partizioni in parti infinite di $\omega \times \omega$ moltiplicando ciascuna delle parti per ω.

soluzione Sfruttando gli esercizi precedenti, basta dimostrare

$$|\text{partizioni di } w \text{ in p. infinite}| \geq |\text{partizioni di } w|$$

Osserviamo che una biezione $f: A \to B$ induce una biezione $\bar{f}: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, $\bar{f}(X) = f[X]$ che preserva la cardinalità: $|\bar{f}(X)| = |X|$. Detto $Part^{\geq \aleph_0}(\square)$ l'insieme delle partizioni in parti infinite di $\square$, si vede facilmente che $\bar{f}|_{Part^{\geq \aleph_0}(A)}: Part^{\geq \aleph_0}(A) \to Part^{\geq \aleph_0}(B)$ è una biezione. Di conseguenza $|Part^{\geq \aleph_0}(w)| = |Part^{\geq \aleph_0}(w \times w)|$

Ci basta quindi osservare che la seguente funzione è iniettiva

$$\begin{aligned} \{\text{partizioni di } w\} &\longrightarrow Part^{\geq \aleph_0}(w \times w) \\ P &\longmapsto \{A \times w \mid A \in P\} \end{aligned}$$

- $|\{\text{sottoinsiemi chiusi di } \mathbb{R}\}| = 2^{\aleph_0}$

Chiaramente $|\dots| \geq 2^{\aleph_0}$ perché la funzione $\mathbb{R} \to \{\text{chiusi}\}$, $x \longmapsto \{x\}$ è iniettiva. Per il viceversa dimostriamo che la funzione seguente è iniettiva.

$$\begin{aligned} f: \{\text{chiusi di } \mathbb{R}\} &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \\ A &\longmapsto \{(a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid a < b \wedge]a,b[\cap A = \emptyset\} \end{aligned}$$

Basta osservare che, per definizione di insieme chiuso, $x \notin A$ se e solo se esistono $y, z \in \mathbb{R}$ tali che $y < x < z$ e l'intorno $]y,z[$ di x non interseca $\mathbb{R}$. In questo caso, per la densità di $\mathbb{Q}$, possiamo trovare $a, b \in \mathbb{Q}$ con $y < a < x < b < z$. Di conseguenza

$$A = \mathbb{R} \setminus \bigcup \{]a,b[\mid (a,b) \in f(A) \}$$

Questo prova l'iniettività di f, per cui

$$|\text{chiusi di } \mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})| = 2^{|\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}|} = 2^{\aleph_0}$$

Delle seguenti a quali è possibile rispondere, assumendo che, senza la scelta, non si può dire se valga o no $|\text{sottoinsiemi numerabili di } \mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$?

- $|\text{sottoins. di } \mathbb{R} \sim (w,<) \text{ con l'ordinamento indotto}| = 2^{\aleph_0}$

Questa è una conseguenza di un esercizio precedente,

$$|\text{successioni (strettamente) crescenti di reali}| = 2^{\aleph_0}.$$

Basta osservare, infatti, che la funzione

$$\text{Im: succ. crescenti di reali} \longrightarrow \text{sottoins. di } \mathbb{R} \sim (w,<)$$

$$(a_i)_{i\in w} \longmapsto \{a_i \mid i \in w\}$$

è bigettiva.

Im è ben definita e surgettiva perché a è un isomorfismo di ordini fra w e $\mathrm{Im}(a)$, quindi $(\mathrm{Im}(a), <_{\mathbb{R}}) \sim (w,<)$.

Dire che è iniettiva significa dire che dato $\mathrm{Im}(a)$, un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ isomorfo a $(w,<)$, a è l'unico isomorfismo di ordini fra $(w,<)$ e $\mathrm{Im}(a)$. Sia allora b un secondo isomorfismo, ne segue che $f = b^{-1}\circ a$ è un isomorfismo fra $(w,<)$ e se stesso diverso dall'identità. Questo però non può essere perché dal fatto che f è crescente deduciamo $f(n) \geq n$ (induzione: $f(0) \geq 0$, $f(n+1) > f(n) \geq n \to f(n+1) \geq n+1$),

ma parimenti $f^{-1}(n) \geq n$, quindi $f(n) = n$.

- $|\text{sottoins. di } \mathbb{R} \sim \mathbb{Q} \text{ con l'ordinamento indotto}| =$ non si può dire SENZA SCELTA!

Ci basta argomentare che se sapessimo rispondere a questa domanda, allora sapremmo altresì la cardinalità dell'insieme dei sottoinsiemi numerabili di $\mathbb{R}$. Cerchiamo quindi una funzione iniettiva

$$f : \text{sottoins. numerabili di } \mathbb{R} \to \text{sottoins. di } \mathbb{R} \sim \mathbb{Q}$$

Trovata f avremo concluso perché, siccome i sottoinsiemi isomorfi a $\mathbb{Q}$ sono, in particolare numerabili, avremo $|\text{sottoins. numerabili}| \leq |\text{sottoins. } \sim \mathbb{Q}| \leq |\text{sottoins. numerabili}|$. Quindi le cardinalità coincidono per Cantor–Bernstein.

Per costruire f, sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ biunivoca, che esiste in quanto $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ e $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, quindi $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$. Definiamo $f(X) = g[X] \cup \mathbb{Q}$.

- f è ben definita poiché, se X è numerabile, $g[X] \cup \mathbb{Q}$ è unione di numerabili quindi numerabile. Inoltre, $f(X)$ contiene $\mathbb{Q}$, quindi è denso in $\mathbb{R}$, ed in particolare, in se stesso. Infine $f(X)$ non ha massimo (risp. minimo), poiché questo dovrebbe essere maggiore (risp. minore) di tutti i razionali. Per il teorema di Cantor, $f(X) \sim \mathbb{Q}$.
- f è iniettiva perché $X = g^{-1}[f(X) \setminus \mathbb{Q}]$.

- $|\text{sottoinsiemi di } \mathbb{R} \text{ ben ordinati dall'ordinamento indotto}| = 2^{\aleph_0}$

<u>idea</u> Se S è ben ordinato e $x \in S$, allora o x è il massimo di S o esiste un $y \in S$ che è il minimo $> x$. Comunque, posso trovare un razionale r tale che x è il massimo di S prima di r. Posso quindi sperare di usare questi razionali come codici degli elementi di S.

<u>soluzione</u> Siccome i sottoinsiemi $\subseteq (\omega, <)$ sono, in particolare, ben ordinati, ci basta mostrare che la funzione seguente è iniettiva

$$f : \text{sottoins. ben ord di } \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R} \cup \{\clubsuit\})^{\mathbb{Q}}$$

$$f(S) : r \longmapsto \begin{cases} \max\{x \in S \mid x < r\} & \text{se esiste} \\ \clubsuit & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\clubsuit$ è un qualunque $\notin \mathbb{R}$. Chiaramente $|\mathbb{R} \cup \{\clubsuit\}| = (2^{\aleph_0} + 1)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, avremo quindi l'asserto.

Va da sé che $\text{Im}(f(S)) \setminus \{\clubsuit\} \subseteq S$, ci basta quindi mostrare l'inclusione opposta, ossia che, dato $S \subseteq \mathbb{R}$ ben ordinato da $<_{\mathbb{R}}$, per ogni $x \in S$ esiste un $r \in \mathbb{Q}$ tale che $f(S)(r) = x$. Ci sono due casi:

- se $x = \max(S)$, allora basta un qualunque $r > x$
- se no, sia $y = \min\{z \in S \mid z > x\}$ che esiste poiché S è ben ordinato. Per densità di $\mathbb{Q}$ c'è $r \in \mathbb{Q}$ con $x < r < y$, chiaramente $x = f(S)(r)$.